

Séance 29 : Leçons à l'oral de modélisation et calcul scientifique

* (Rapport 2020) : 6 leçons de calcul scientifique sont au programme.

* Déroulement

- 10 minutes : plan (+2 Drpt)
- 20 minutes : développement avec partie informatique
- 30 minutes : questions + exercices (sur le plan)

* Références bibliographiques :

- Demailly : Analyse Numérique et équations différentielles [Dem]
- Schatzman : Analyse numérique : une approche mathématique [Sch]
- Ciarlet : Introduction à l'analyse numérique matricielle [Cia]
- Lascaux Théodore [LaTh]
- Allaire/Kaber : Algèbre linéaire numérique [All]
- Filbet : Analyse numérique [Fil]
- Hubert/Hubbard : calcul scientifique, tome 1 (voire tome 2) [Hub]

Leçon n°1 (○○○) (Difficulté)

Autres possibilités de développement: 2

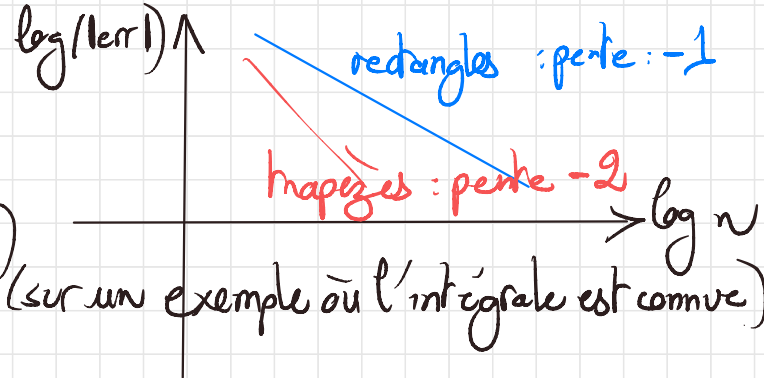
1. Calcul numérique : intégration, différentiation, sommation, résolution d'équations algébriques ou différentielles.

Il s'agit de parler des aspects numériques pour différents sujets :

- intégration
- gestion des arrondis numériques dans les opérations (linéaires)
- résolution d'équations non linéaires
- résolution d'équations différentielles

* Ref : [Dem], chapitre 1 (en intégralité)

→ intégration numérique : comparaison de la vitesse de convergence de la méthode des rectangles et des trapèzes (illustration)



Leçon n° 2 (•)

2. Méthodes numériques pour les systèmes linéaires : conditionnement, factorisation LU, méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires sans contraintes.

→ Toute l'algèbre numérique est proposée dans cette leçon : il faut faire des choix, en gardant certains aspects comme le conditionnement.

→ Systèmes linéaires : 1 directe, 1 itérative
 $Au=b, A \in GL_n(\mathbb{R})$

→ Recherche de valeurs propres : puissance (+ Jacobi)
 $\exists \lambda \text{ tq } \exists X \neq 0, AX = \lambda X$

→ Moindres carrés $\text{Min}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2$ (*)
 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), p > n$

(*) équation normale : $\underbrace{A^T A}_{n \times n} x = \underbrace{A^T b}_{n \times 1}$

* Références : [Sch], [Fil], [Cia], [AII]

* Exemples de développement

→ existence et unicité de LU
(+ implémentation sur un exemple)

→ convergence de Jacobi ($\rho(M^{-1}N) < 1$)
(+ vérification)

→ preuve de convergence de la méthode de la puissance
(+ exemple (**), éventuellement en modélisation)

(**) $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$
↑
aléatoire

3

Leçon n° 3 (•)

3. Résolution de systèmes d'équations non linéaires : Méthode de Newton, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

* Référence { [Dem], chapitre 4
(difficile)
[Hub], tome 1

* Séparer les aspects $n=1$ et $n>1$
($n=1$ n'est pas au cœur de la leçon)

* Exemples : issus des références
(modélisation : GPS, voir séance 2)

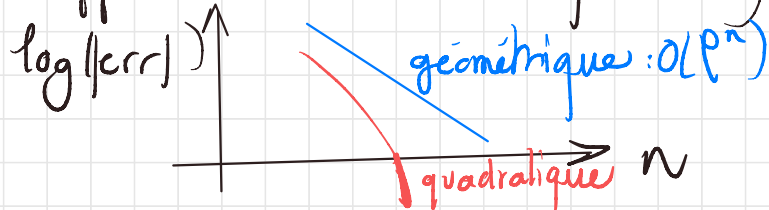
* Exemples de développement 4

→ 1 d'vpt pour $n=1$ (Newton, sécante)
pr fixe) + exemple avec comparaison
des vitesses de convergence ([Dem])

→ 1 d'vpt pour $n>1$: théorème de
Kantorovitch ([Hub]) + exemple

$$x_{n+1} = x_n - Df(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)$$

(pour approcher une solution de $f(x)=0$)



Leçon n° 4 : (●●)

* Exemples de développements : 5

4. Equations différentielles ordinaires : Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre.

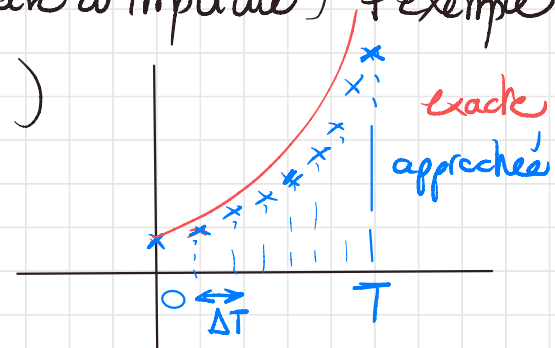
* Gagner les méthodes d'Euler explicites et implicites, on peut présenter le cadre général des méthodes à un pas, avec

→ Preuve directe de convergence d'Euler (explicite ou implicite) + exemple $(y' = ay + b)$

l'exemple de la méthode de Heun :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta T}{2} \left[f(t_n, y_n) + f(t_n + \Delta T, y_n + \Delta T f(t_n, y_n)) \right]$$

(voir RK4)



* Références [Dem] (aussi : [Sch], [Fil])

→ sur une des 4 notions, faire le lien entre la définition et la propriété sur Φ .
 (exemple : ordre + illustration avec Heun)
 $\log(\text{Max}(\text{err})) \sim \log n$
 Heun (pente : -2)

* Attention à ne pas faire trop de théorie sur les EDO (prérequis : Cauchy-Lipschitz)

Leçon n° 5: (••)

Tome 1 (ou [Sch], [Fi]))

6

7. Calcul matriciel : opérations élémentaires sur lignes et sur colonnes, méthode du pivot de Gauss.

* Attention à ne pas refaire la leçon 4 & (Algèbre). On peut cependant garder ces développements théoriques en les illustrant.

* Il faut introduire les difficultés numériques liées au passage à un outil de calcul numérique (et non formel):

→ conditionnement (cf Hilbert, ...)

→ stratégie de pivot

* Références : [Cra], [LaTh]

* Exemples de développements :

→ existence de M inversible. Eq
 $MA = L$ (triangulaire supérieure)
+ expression de M (permutation, transvection)

(+ implémentation Gauss)

→ complexité de Gauss ($\sim \frac{2}{3}n^3$ op.)
(+ illustration sur la rapidité du calcul sur un ordinateur à 1 Gflops $\sim 10^9$ op/s)

→ Cas particulier : matrices creuses
(+ illustration avec le Laplacien discret)

Leçon 6 : (••)

Polynômes à une indéterminée : évaluation (Horner), interpolation (Lagrange), localisation des racines dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

1 Pour l'algorithme de calcul, on peut soit utiliser l'algorithme des

7

* Références : [Dem] (chap. 2), [Hub]

différences divisées, soit utiliser la matrice de Vandermonde.

→ Lagrange : multiples exemples de démonstrations pouvant servir de développements avec l'exemple numérique

→ Horner : voir [Dem] chap. 1 (+ illustration dans l'algo. des différences divisées)

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ sur } [-\alpha, \alpha]$$

localisation des racines : voir [Hub], p. 223

- $\alpha = 5 \oplus$ pts équidistant : non convergence
- $\alpha = 1 \oplus$ " " : convergence
- $\alpha = 5 \oplus$ pts de Tchebychev : convergence

(dent : disques de Gershgorin ou suites de Sturm).

→ lien avec la recherche des valeurs propres.