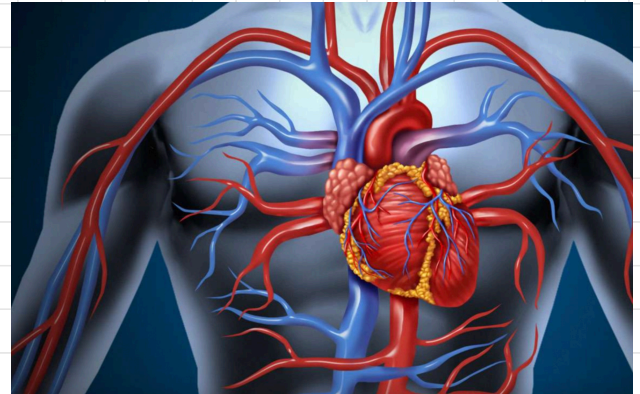


Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Textes 14 et 15 : cœur et artères

- * Objetif: modéliser et simuler l'activité cardiaque et l'écoulement sanguin dans les artères.
- * Exemple étudié: modèle phénoménologique de Van der Pol (cœur) couplé à un modèle fluide/structure 1D (artères)
- * Outils mathématiques: équations différentielles et aux dérivées partielles



Étape 1: modélisation de l'activité électrique du cœur

On souhaite construire un modèle ayant les propriétés suivantes :

- période constante sans force extérieure (après phase transitoire)
- forme non sinusoïdale
- amplitude indépendante de la force extérieure (si petite)
- période fonction de la force extérieure (et synchronisation avec elle)

On choisit, par analogie avec un circuit RLC, de considérer le système de Van der Pol :

$$\begin{cases} x'(t) = \varepsilon (y(t) - f(y(t)) + F(t)) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

avec : $\varepsilon > 0$: paramètre (1)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

soit de manière équivalente :

$$x''(t) + (x^2(t) - 1)x'(t) + x(t) = \frac{F'(t)}{\varepsilon}$$

Etape 2: propriétés qualitatives

du système (1) et simulation

numérique

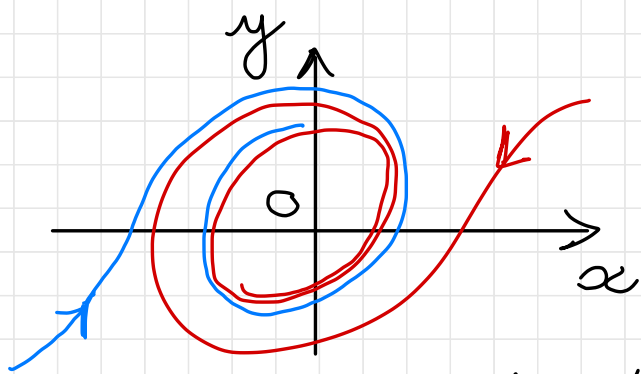
On prend ici $\varepsilon = 1$:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - \frac{1}{3}x^3(t) + \alpha(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

Ce système possède les propriétés:

→ $(0, 0)$ seul point d'équilibre, repulsif, de type source.

→ il existe une unique solution



périodique non triviale γ

→ les autres trajectoires s'approchent de γ en tournant.

* La simulation du système s'effectue à l'aide d'un schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4.

* Un choix de $\varepsilon > 1$ permet d'obtenir des solutions non sinusoïdales

Etape 3 : modélisation de l'écoulement du sang dans les artères

Principales hypothèses :

- artère rectiligne, à section circulaire de type "tuyau élastique"
- fluide non visqueux, incompressible
- vitesse uniforme sur chaque section



inconnues = $\left\{ \begin{array}{l} \text{section : } A(t,x) \\ \text{débit : } q(t,x) (\equiv Aw) \end{array} \right.$

→ Après écriture des relations de conservation de masse et la loi de Newton, on obtient :

$$\frac{\partial W(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$W(t,x) = \begin{pmatrix} A(t,x) \\ q(t,x) \end{pmatrix}$$

et

$$f(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{A} + A \hat{p}(A) \\ \rho_0 \end{pmatrix}$$

avec $\hat{p}(A)$: loi de pression

Etape 4 : résolution numérique du système (2)

* On complète le système (2):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0 \quad \begin{array}{l} t \in [0, T] \\ x \in [0, L] \end{array}$$

par des conditions initiales :

$$U(0, x) = \begin{pmatrix} A_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{(artère)} \\ \text{au repos} \end{array}$$

et des conditions en entrée :

$U(t, 0) = G(t)$: pulsations
sinusoïdales (ou modèle de cœur)

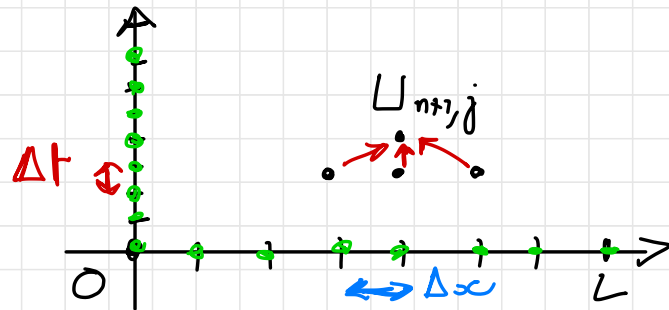
* On discrétise t : $t_n = n \Delta t$
et l'espace x : $x_j = j \Delta x$

et on propose le schéma de
Lax-Friedrichs : $U(t_n, x_j) \approx U_{n,j}$:

$$U_{0,j} = U(0, x_j),$$

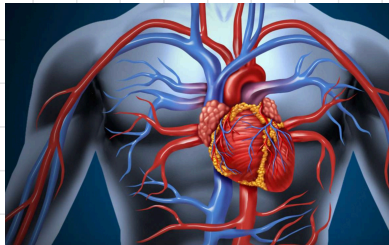
$$U_{n,0} = G(t_n) \text{ et :}$$

$$U_{n+1,j} - \frac{1}{2} (U_{n,j+1} + U_{n,j-1}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{2} (f(U_{n,j+1}) - f(U_{n,j-1})) = 0$$

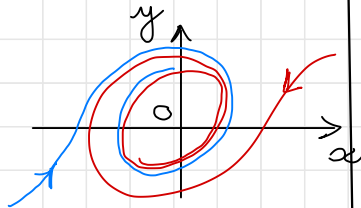


Etape 5 : simulation avec le logiciel Jupyter

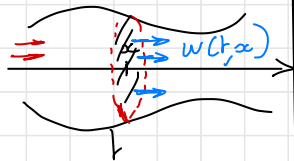
On utilise la version notebook de Python pour simuler l'activité électrique du cœur et l'écoulement du sang dans une artère



Cœur



artère



Pour aller plus loin :

- justifications mathématiques des propriétés qualitatives de l'EDO (1)
- Modélisation détaillée de l'EDP (2) et étude de l'EDP linéarisée

Références

- * Textes agrégation :
"Battement de cœur" et "puls sanguin"
- * Qu'est ce que la modélisation ?
www.imose.fr