Correction

1. On utilise le théorème de Cauchy Lipschitz pour les EDO linéaires scalaires d'ordre 2 (au programme).

2. On note w_2 l'unique solution de

$$\begin{cases} -w_2''(x) + c(x)w_2(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ w_2(0) = 0 \\ w_2'(0) = 0 \end{cases}$$

On a bien $u_\lambda = \lambda w_1 + w_2$ par unicité dans Cauchy Lipschitz.

3. Par l'absurde, on suppose que $w_1(1) = 0$. Au vu de sa valeur en 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que $w_1 > 0$ sur un intervalle $]0, \epsilon[$. Comme $w_1'' = cw_1 \geq 0$, on a aussi $w_1' \geq 1$ sur $]0, \epsilon[$. Si on note à bon droit $A = \inf\{x \in]0,1], w_1(x) = 0\}$, comme w_1 est continue, on a $w_1(A) = 0$ et aussi $A \in]\epsilon, 1]$. En reprenant le raisonnement précédent sur $]0, A]$, on a $w_1(A) \geq A$, ce qui est absurde.

4. On considère la fonction

$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto v_\lambda(1) \end{pmatrix}$$

On a $\Phi(\lambda) = \lambda w_1(1) + w_2(1)$. Comme $w_1(1) \neq 0$, il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(\lambda^*) = 0$. La fonction $u = u_\lambda^*$ est solution de (1). Pour l'unicité, en raisonnant par l'absurde, soient u et $\tilde{u}$ deux solutions distinctes. La fonction $w = u - \tilde{u}$ vérifie

$$\begin{cases} -w''(x) + c(x)w(x) = 0, \quad x \in [0,1] \\ w(0) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases}$$

Si $w'(0) = 0$, alors par unicité de Cauchy Lipschitz, on a $w = 0$, ce qui est absurde. On a donc $w'(0) \neq 0$ et on est ramené au cas précédent avec w_1. On aboutit à une absurdité de la même façon.

5. On suppose par l'absurde qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $u(x_0) < 0$. Dans ce cas, comme u est continue, il existe $\epsilon > 0$ tel que $u < 0$ sur $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$. En

étendant cet intervalle comme précédemment et sachant que $u(0) = u(1) = 0$, on peut montrer qu'il existe $A \in [0, x_0 - \epsilon[$ et $B \in]x_0 + \epsilon, 1]$ tel que $u(A) = u(B) = 0$ et $u < 0$ sur $]A, B[$. Comme $u'' = cu - f \leq 0$ sur $]A, B[$, on aboutit à une contradiction (u' est décroissante, $u'(A) \leq 0$, $u'(B) \geq 0$ et $u(x_0) < 0$).

6. Comme A_n est symétrique, $\lambda \in \mathbb{R}$. On traduit ensuite $Av = \lambda v$ en

$$-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1} = \lambda v_i, \quad 2 \leq i \leq n-1$$

et $2v_1 - v_2 = \lambda v_1$ ainsi que $-v_{n-1} + 2v_n = \lambda v_n$. En introduisant v_0 et v_{n+1} tels que $v_0 = v_{n+1} = 0$, on a bien le resultat annoncé.

7. Si $\lambda \notin [0, 4]$ alors la matrice $A_n - \lambda I_n$ est à diagonale strictement dominante (par exemple).

On suppose que 0 est valeur propre. Dans ce cas, l'équation caractéristique associée à la récurrence d'ordre 2 sur v_i admet 1 comme valeur propre double. Il existe donc α et u dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall i \in \{0, ..., N+1\}, \quad v_i = \alpha + ui$$

Le fait que $v_0 = v_{N+1} = 0$ implique que $\alpha = u = 0$ soit $v_i = 0$, ce qui est absurde avec le fait que 0 est valeur propre. Le raisonnement est identique en supposant que 4 est valeur propre.

8 a) Si $\lambda \in]0, 4[$, le discriminant de l'équation caractéristique, égal à $\lambda(\lambda - 4)$, est négatif.

8 b) En notant $r_1 = \rho e^{i\theta}$, on en déduit l'existence de α et u dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$v_i = (\alpha \cos(i\theta) + u \sin(i\theta))\rho^i$$

La relation $v_0 = 0$ implique $\alpha = 0$ tandis que $v_{n+1} = 0$ implique que $u \sin((n+1)\theta))\rho^{n+1} = 0$, soit nécéssairement pour que $v \neq 0$, $\sin((n+1)\theta) = 0$. De plus, $r_1 r_2 = 1$, ce qui implique que $\rho = 1$.

9. Dans le cas précédent, on a de plus $r_1 + r_2 = 2 - \lambda$ soit $\lambda = 2 - 2\cos(\theta)$. En supposant que λ est valeur propre dans $]0, 4[$, il vient ainsi que $\sin((n+1)\theta) = 0$, soit $\theta = \dfrac{k\pi}{n+1}$. Réciproquement, pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, en notant

$$\lambda_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$

λ_k est bien une valeur propre de A_N et un vecteur propre associé peut s'écrire :

$$v_i = C \sin(i \frac{k\pi}{N+1})$$

avec $C \in \mathbb{R}^*$. On a ainsi trouvé n valeurs propres distinctes de A_n dans l'intervalle $]0,4[$. Elles y sont toutes !

10. a) B est une matrice à diagonale strictement dominante : en considérant un vecteur X dans $\mathrm{Ker}(B)$, on note i_0 l'indice pour lequel $|x_i|$ est maximal. Alors :

$$b_{i_0,i_0}|x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |b_{i_0,j}||x_{i_0}|$$

ce qui n'est possible que si $x_{i_0} = 0$, soit $X = 0$

10 b) Soit ensuite $v = B^{-1}F$. On note i_0 l'indice pour lequel v_j est minimal. En supposant v_{i_0} strictement négatif, on a

$$0 \leq f_{i_0} = \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_j + b_{i_0,i_0} v_{i_0} \leq \sum_{j \neq i_0} b_{i_0,j} v_{i_0} + b_{i_0,i_0} v_{i_0} < 0$$

ce qui est absurde.

10. c) Soit alors K_j la $j$ème colonne de B^{-1}. On a $K_j = B^{-1}e_j$, ce qui implique que les composantes de K_j sont positives avec le résultat précédent.

11. pour tout $\epsilon > 0$, $A_n + \epsilon I_n$ est une M-matrice au sens précédent. En passant à la limite lorsque $\epsilon \to 0^+$, on en déduit le résultat demandé par continuité de l'application $M \to M^{-1}$ dans $GL_n(\mathbb{R})$, à savoir que les coefficient de A_n^{-1} sont encore tous positifs.

12. On utilise deux fois la formule de Taylor à l'orde 4 :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\zeta_i)$$

et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\zeta_i)$$

et en sommant, il vient

$$|u''(x_i) - \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i))| \leq ||\frac{h^2}{12}u^{(4)}||_\infty$$

13. On note $C_n = \text{diag}(c(x_1), ...c(x_n))$ et $F_n =^t (f(x_1), ...f(x_n))$. Alors, $\tilde{u}^n = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ est solution de

$$(\frac{1}{h^2}A_n + C_n)\tilde{u}^n = F_n$$

La matrice $B_n = \frac{1}{h^2}A_n + C_n$ est inversible d'après la partie 2 et le fait que $c \geq 0$.

14. La solution exacte du problème dans ce cas est $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. Pour cette fonction, l'inégalité démontrée en question 12 est une égalité. Par unicité de la solution de (2), on a donc bien $u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)$ pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$.

15. De la même façon que cela a été démontré dans la question 11, les coefficients de $(\frac{1}{h^2}A_n + C_n)^{-1}$ sont tous positifs ($\frac{1}{h^2}A_n + C_n + \epsilon I_n$ est une M-matrice) ce qui implique bien que si $f \geq 0$, tous les coefficients de F_n sont positifs tout comme ceux de u^n.

16. Toute norme subordonnée est une norme. Pour le second point, on remarque d'abord que

$$||Ax||_\infty = \max(|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j|, i \in \{1, ..., n\}\}) \leq \max_{i\in\{1,...,n\}}(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|)||x||_\infty$$

puis que si $x = (\text{sgn}(a_{i_0,j}))_{1\leq j\leq n}$, avec i_0 l'indice tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est maximal, on a

$$||Ax||_\infty = \max_{i\in\{1,...,n\}}(\sum_{j=1}^N |a_{i,j}|)$$

17 a) On suppose $c = 0$. On sait depuis la question 15 que si $f \geq 0$ alors $u_i \geq 0$. Par linéarité, cela signifie aussi que si $|f| \leq 1$ alors $|u_i| \leq u_i^*$ où u_i^* désigne la solution du système (2) pour $c = 0$ et $f = 1$. Or, cette solution est connue, il s'agit de $u_i^* = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)$. On a alors $|u_i| \leq \frac{1}{8}$.

Cela signifie exactement que

$$|||((n+1)^2 A_n)^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$$

17 b) On compare à présent les solutions du système (2) avec $c \geq 0$ et $c = 0$, notées respectivement u_i et $\tilde{u}_i$ pour un second membre $f \geq 0$. On montre toujours avec la question 15 que $u_i \leq \tilde{u}_i$. Cela implique à nouveau avec la question précédente et la linéarité de l'EDO que $|u_i| \leq \frac{1}{8}$ si $|f| \leq 1$.

18. On écrit

$$-\frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i) - \delta(x_i) \quad (1 \leq i \leq N)$$

avec

$$\delta(x_i) = \frac{1}{h^2}(u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) - 2u(x_i)) - u''(x_i)$$

En note X le vecteur formé des $u(x_i) - u_i$ pour $1 \leq i \leq n$, on a donc

$$||X||_\infty \leq |||(\frac{1}{h^2}A_n + C_n)^{-1}|||_\infty \times ||\delta^n||_\infty \leq C\frac{h^2}{8}$$

19 a) La somme $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et x.

$$P(S_n = \frac{k}{n}) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Puisque les variables ont la même loi, on a

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_\ell) = x.$$

Puisque les variables sont deux à deux indépendantes, on a aussi :

$$\text{Var}(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k) = nx(1-x).$$

D'où

$$\text{Var}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Par le théorème de transfert on a aussi :

$$\mathbb{E}(f(S_n)) = B_n f(x).$$

19 b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le second membre, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} |x-\frac{k}{n}| \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k(1-x)^{n-k} &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} (x-\frac{k}{n})^2 \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k(1-x)^{n-k}) \right)^{1/2} \\
& \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k(1-x)^{n-k} \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{n} (x-\frac{k}{n})^2 \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k(1-x)^{n-k}) \right)^{1/2} \\
&= (\mathrm{Var}(S_n))^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

20. Il suffit de montrer l'inégalité

$$\alpha \log(\lambda) \leq \log(1+\lambda),$$

en étudiant la fonction

$$g(\lambda) = \log(1+\lambda) - \alpha \log(\lambda).$$

On a

$$g'(\lambda) = \frac{1}{\lambda+1} - \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{(1-\alpha)\lambda - \alpha}{(\lambda+1)\lambda}.$$

Ainsi le minimum de g est atteint en

$$\lambda_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

et vaut

$$g(\lambda_0) = \log(\frac{1}{1-\alpha}) - \alpha \log(\frac{\alpha}{1-\alpha}) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha) \geq 0.$$

Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En choisissant $\lambda = \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité :

$$\left|x - \frac{k}{n}\right|^{\alpha} \leq n^{-\alpha/2}\left(1 + \sqrt{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|\right)$$

21. On a maintenant

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &= |\mathbb{E}(f(x) - f(S_n))| = |\sum_{k=0}^{n}(f(x) - f(\frac{k}{n}))\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}|, \\
&\leq |\sum_{k=0}^{n}|f(x) - f(\frac{k}{n})|\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}, \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n}|x - \frac{k}{n}|^{\alpha}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}, \\
&\leq Kn^{-\alpha/2}[\sum_{k=0}^{n}(1 + \sqrt{n}|x - \frac{k}{n}|)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}] \\
&\leq Kn^{-\alpha/2}(1 + \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}|x - \frac{k}{n}|\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}) \\
&\leq \frac{3}{2}Kn^{-\alpha/2}.
\end{aligned}$$

22

$$\begin{aligned}
(\widehat{B}_{n+1}u)''(x) &= \sum_{k=2}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} k(k-1)u_k x^{k-2}(1-x)^{n+1-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}(n+1-k)(n-k)u_k x^k(1-x)^{n-k-1} \\
&\quad + 2\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} k(n+1-k)u_k x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ \ell+2 \end{pmatrix}(\ell+2)(\ell+1)u_{\ell+2}x^{\ell}(1-x)^{n-1-\ell} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}(n+1-k)(n-k)u_k x^k(1-x)^{n-k-1} \\
&\quad + 2\sum_{\ell=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ \ell+1 \end{pmatrix}(\ell+1)(n-\ell)u_{\ell+1}x^{\ell}(1-x)^{n-1-\ell}
\end{aligned}$$

En utilisant les égalités

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ \ell+2 \end{pmatrix} = \frac{(n+1)n}{(\ell+2)(\ell+1)} \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n+1)n}{(n+1-k)(n-k)} \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n+1 \\ \ell+1 \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{(\ell+1)(n-\ell)} \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix}.$$

on obtient l'identité

$$(\widehat{B}_{n+1}u)''(x) = n(n+1)\sum_{\ell=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} (u_{\ell+2}+u_\ell-2u_{\ell+1})x^\ell(1-x)^{n-1-\ell}$$

Puisque

$$u_{\ell+2}+u_\ell-2u_{\ell+1} = -h^2 f(x_{\ell+1}) \text{ avec } x_{\ell+1} = \frac{\ell+1}{n+1},\ h = \frac{1}{n+1}.$$

on obtient l'identité demandée.

23 a). On a :

$$\begin{aligned}
\chi''_{n+1}(x) &= f(x) - \frac{n}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_{\ell+1}) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} x^\ell(1-x)^{n-1-\ell} \\
&= f(x) - \sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_\ell^*) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} x^\ell(1-x)^{n-1-\ell} \\
&\quad + \sum_{\ell=0}^{n-1} (f(x_\ell^*) - f(x_{\ell+1})) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} x^\ell(1-x)^{n-1-\ell} \\
&\quad + \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x_{\ell+1}) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} x^\ell(1-x)^{n-1-\ell}.
\end{aligned}$$

où

$$x_\ell^* = \frac{\ell}{n-1}.$$

Ainsi,

$$|x_{\ell+1} - x_\ell^*| = |\frac{\ell+1}{n+1} - \frac{\ell}{n-1}| = |\frac{-2\ell+n-1}{(n+1)(n-1)}| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$|\chi_n''(x)| \leq |(f - B_{n-1}f)(x)| + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

23 b)

Observons que $\chi_{n+1}(0) = \chi_{n+1}(1) = 0$. L'identité est triviale pour $x = 0$ ou $x = 1$ (peu importe ξ). Pour $0 < x < 1$, on pose

$$h(t) = \chi_{n+1}(t) - \frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)}t(1-t),\ t \in [0,1].$$

On a $h(0) = h(1) = h(x) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à h entre 0 et x et entre x et 1, puis à h', on en déduit l'existence de $\xi \in]0,1[$ tel que

$$h''(t) = 0,$$

soit

$$\chi_{n+1}''(\xi) + 2\frac{\chi_{n+1}(x)}{x(1-x)} = 0.$$

24. On a pour $x \in [0,1]$

$$|\chi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2}x(1-x)|\chi_{n+1}(\xi)''| \leq \frac{1}{8}(\|f - B_{n-1}f\|_\infty + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}).$$

Ainsi,

$$|\chi_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{8}(\frac{3K}{2}\frac{1}{(n-1)^{\alpha/2}} + \frac{1}{n+1}\|f\|_\infty + K\frac{1}{(n+1)^\alpha}) \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}.$$

.