Master de mathématiques M1. Université Versailles-Saint Quentin
Analyse Fonctionnelle Appliquée 2.
Année 2007/2008.

Lundi 14 janvier 2008
9h00-12h00
Bât. F, salle 2006
L'usage des calculatrices, des téléphones portables et de tout document est interdit

Exercice 1.

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, une suite de fonction vérifiant,

$$\exists L > 0 \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L|x-y| \text{ et } |f_n(0)| \leqslant L$$

1) Montrer que $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
2) Montrer qu'il existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 2.

Soit E un espace de Banach.
Soit P une application linéaire de E dans E vérifiant $P^2 = P$.
On suppose que $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Ker} P$ sont fermés.

1) Montrer que si (u_n, Pu_n) converge vers (u,v) dans $E \times E$ alors $u - v \in \operatorname{Ker} P$ et $v \in \operatorname{Im} P$.
2) Montrer que P est continue.

Exercice 3.

Soit $(X, .)$ un groupe abélien muni d'une métrique d telle que la multiplication et le passage à l'inverse sont continus. On suppose de plus (X,d) compact.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il n'existe pas d'isomorphisme T continu de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(X, .)$. ((T^{-1} n'est pas supposé continu a priori). La preuve se fera par l'absurde.
Dans la suite on suppose qu'il existe $T : (\mathbb{R}, +) \to (X, .)$ un isomorphisme continu.

1) On note $I_n = [-n, n]$. Montrer qu'il existe p tel que $T(I_p)$ soit d'intérieur non vide. (Appliquer le théorème de Baire).
2) Montrer qu'il existe $x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{R}$ tels que $T^{-1}(X) \subset \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + I_p)$. En déduire une contradiction.

Exercice 4.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$. On note $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sa base canonique, $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.
Soit $A = \{\sqrt{n+1}e_n\}$.

1) Montrer que la suite $u_n = \sqrt{n+1}e_n$ ne converge pas faiblement dans H. Montrer de même que toute sous-suite de u_n ne converge pas faiblement dans H.

2) Montrer que $\forall y \in H, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |(y|e_n)|^2 < +\infty$.

3) Montrer que $\forall y_1, \cdots, y_k \in H, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{j=1}^{k} |(y_j|e_n)|)^2 < +\infty$.

   On note pour $\varepsilon > 0$ et $y_1, \cdots, y_k \in H$, $V = \{x \in H,\ |(x|y_j)| < \varepsilon\}$.

4) Montrer que $V \cap A \neq \emptyset$.(En raisonnant par l'absurde, on peut trouver une contradiction avec la propriété 3))

5) Déduire de 4) que 0 est dans l'adhérence faible de A.
   En déduire que la topologie faible sur H n'est pas métrisable.