EPF 2, Mathématiques appliquées

Partiel du 24 mai 2006. Durée : 2 heures

Les trois exercices sont indépendants. On attachera le plus grand soin à la qualité de la rédaction, à la présentation et à la rigueur des démonstrations. Les notes de cours et de TD sont interdites. La calculette EPF est autorisée.

Exercice 1

Soit N un entier ≥ 1. On veut approcher $\sqrt{N}$ par la méthode de Newton mise sous la forme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad F(x) = x^2 - N.$$

1. On pose $f(x) = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$.

   a) Montrer que $\forall x \in]0, \sqrt{N}[,\ f(x) > \sqrt{N}$ et $\forall x \in]\sqrt{N}, +\infty[,\ \sqrt{N} < f(x) < x$

   b) En déduire que si $x_0 > 0$ et $x_0 \neq \sqrt{N}$, alors $x_n > \sqrt{N}$, $\forall n \geq 1$ et que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{N}$.

2. On pose $e_n = x_n - \sqrt{N}$. Si l'on suppose que x_n est proche de $\sqrt{N}$, démontrer que

   $$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{N}}.$$

   (Indication : On pourra montrer que $F(\sqrt{N}) = F(x_n) + (\sqrt{N} - x_n)F'(x_n) + \frac{1}{2}(\sqrt{N} - x_n)^2 F''(\zeta_n)$, où $\zeta_n \in]\sqrt{N}, x_n[$).

3. Application : On pose $F(x) = x^2 - 7$. Montrer que $\sqrt{7} \in]2, 3[$. Si $x_0 = 3$, trouver le nombre d'itérations n tel que $x_n - \sqrt{7} \leq 10^{-10}$.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x_1'(t) = \pi x_1(t) - t x_2(t), \quad t \in [0, \pi] \\ x_2'(t) = \pi x_2(t), \quad t \in [0, \pi] \\ x_1(0) = a, x_2(0) = b, \quad (a, b \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que (1) admet une unique solution.

2. On pose $z = (x_1, x_2)$. Ecrire l'algorithme d'Euler pour le système (1) pour un pas de discrétisation $h = \pi/N$ et $t_n = nh$. Calculer z_1 et z_2 pour $N = 20$.

3. Donner la valeur de z^n en fonction de n, h, a et b. (Indication : On pourra faire apparaître le nombre $y^n = \dfrac{x_1^n}{(1+\pi h)^n}$ dans l'algorithme d'Euler).

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle

$$xy' - y = x^2 \arctan x.$$

Sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?