

(public 2011)

Résumé : Ce texte présente l'étude d'un modèle du phénomène d'agglomération des globules rouges. En introduisant une force qui dépend de la distance entre deux globules voisins, on aboutit à un système d'équations différentielles du second ordre, que doivent satisfaire les positions des centres des globules

Mots clefs : Systèmes différentiels, aspects numériques du problème de Cauchy, points fixes.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Modélisation

1.1. Modèle dynamique

Il est vérifié expérimentalement que les hématies (autre nom des globules rouges) dans le sang ont tendance à former des agglomérats, ce qui indique la présence de forces d'interaction attractives. On se propose de modéliser ces phénomènes de façon très simplifiée, en considérant une situation monodimensionnelle : on considère une population de $N + 2$ hématies sur l'intervalle $[0, 1]$, chacune subissant l'influence de ses deux voisines, sauf la première et la dernière qui seront supposées fixées en 0 et en 1, respectivement. On désigne la position du centre de l'hématie i par $x_i(t)$, avec

$$0 = x_0 < x_1(t) < \dots < x_N(t) < x_{N+1} = 1,$$

et l'on considère une force d'interaction qui est attractive quand la distance de 2 particules est assez grande, et qui décroît vers 0 quand cette distance tend vers $+\infty$.

Ces hématies sont représentées ici par des particules ponctuelles, mais dans la réalité leur taille est non nulle. On note a leur longueur caractéristique. On suppose chacune des particules légèrement élastique, ce que l'on modélise en prescrivant que la force d'interaction devient répulsive lorsque la distance entre les deux centres de particules voisines devient inférieure à a .

On introduit pour cela une fonction $\varphi : d > 0 \mapsto \varphi(d)$ qui tend vers 0 quand d tend vers $+\infty$, positive pour $d \geq a$, négative pour $d \leq a$ et qui tend vers $-\infty$ quand d tend vers 0. Nous proposons ici la fonction (voir figure 2)

$$\varphi(d) = \frac{\gamma}{d} \ln\left(\frac{d}{a}\right).$$

Pour deux particules voisines en x_i et x_{i+1} , $\varphi(x_{i+1} - x_i)$ représente la force exercée par la particule $i + 1$ sur la particule i , et l'opposée de la force exercée par i sur $i + 1$.

On suppose enfin que chaque particule subit du fluide environnant une force de frottement proportionnelle à sa vitesse, et qui s'oppose au mouvement. Le système dynamique résultant de ce modèle peut ainsi s'écrire (on suppose les particules de masse 1)

$$(1) \quad \ddot{x}_i = \varphi(x_{i+1} - x_i) - \varphi(x_i - x_{i-1}) - \lambda \dot{x}_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

1.2. Considérations énergétiques

En vue d'établir un bilan énergétique pour le système, on introduit une primitive Ψ de φ . On multiplie chacune des équations (1) par \dot{x}_i , puis on somme pour $i = 1, \dots, N$. Il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\dot{x}_i)^2 + \sum_{i=0}^N \Psi(x_{i+1} - x_i) \right) = -\lambda \sum_{i=1}^N (\dot{x}_i)^2$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} (E_c + V) = D \leq 0,$$

où E_c est l'énergie cinétique totale du système, V peut s'apparenter à une énergie potentielle associée aux forces d'interactions, et D est la puissance dissipée par frottement avec le milieu extérieur.

2. Simulation numérique

2.1. Schéma de discrétisation

On introduit la suite $(t_k)_{0 \leq k \leq K}$ définie par $t_k = kh$, où $h = \frac{T}{K}$; ainsi $t_{k+1} - t_k = h$. On note $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_N^k)$ une approximation du vecteur des positions au temps t_k . Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ donné, on note $\Phi(\mathbf{x})$ le vecteur des forces d'interaction correspondant : la i -ème composante de $\Phi(\mathbf{x})$ est $\varphi(x_{i+1} - x_i) - \varphi(x_i - x_{i-1})$, avec comme précédemment $x_0 = 0$, $x_{N+1} = 1$. On propose le schéma suivant, écrit sous forme vectorielle,

$$\mathbf{x}^{k+1} = 2\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1} + h^2 \Phi(\mathbf{x}^k) - \lambda h (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}) \quad k \geq 1,$$

avec les vecteurs de conditions initiales \mathbf{x}^0 et \mathbf{x}^1 donnés.

2.2. Application

On se propose d'appliquer le schéma numérique à la situation de $N = 49$ particules libres disposées initialement de façon « aléatoire » au sens suivant : on prend un vecteur initial $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ défini par

$$X_i = (i + 0.1 \rho_i)(\Delta x),$$

où $\Delta x = 1/50$, et ρ_i est une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $] -1, 1[$.

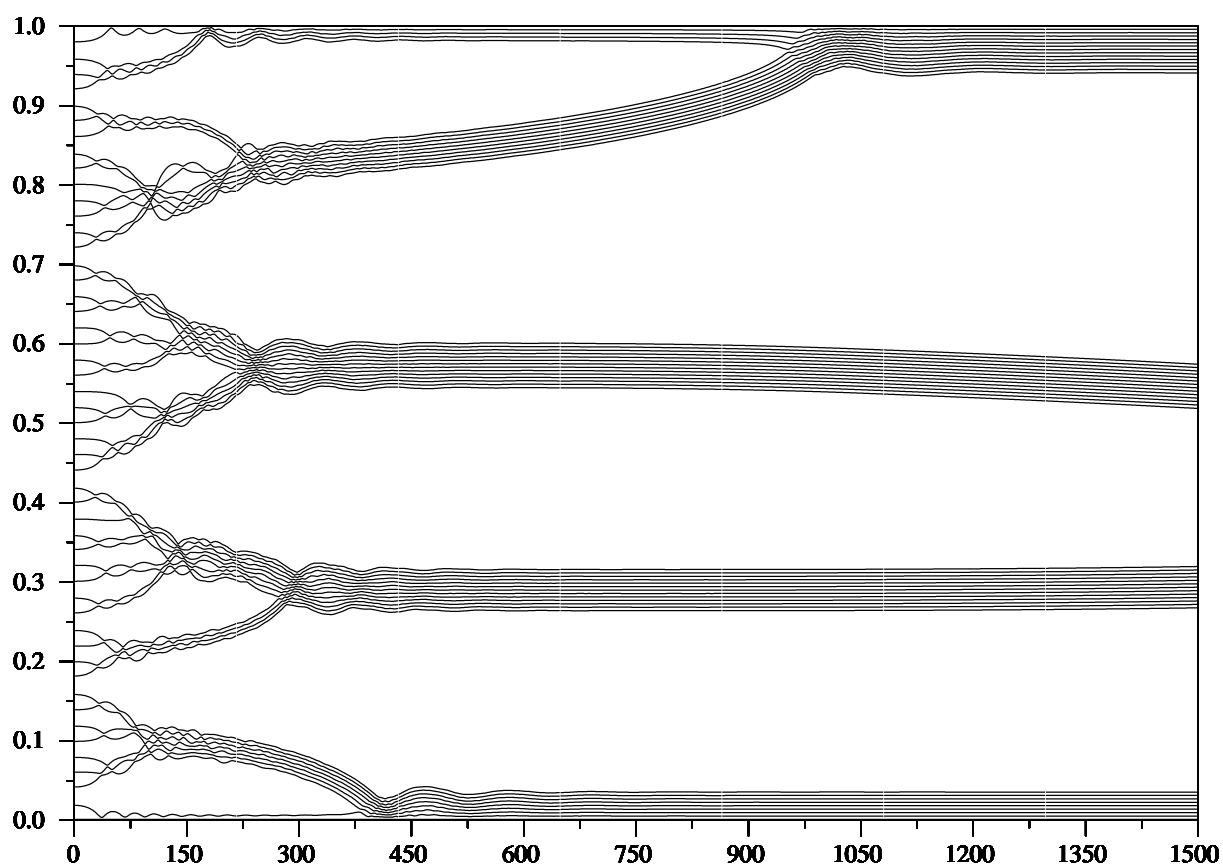


Fig. 1 : Positions au cours du temps

On suppose nulles les vitesses initiales, ce qui conduit à choisir $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^1 = X$. La figure 1 représente les positions des particules en fonction du temps (chaque courbe représente la position d'une particule donnée au cours des itérations en temps), pour les valeurs numériques

suivantes

$$K = 1500, \quad h = 0.002, \quad T = Kh = 3.0, \quad \gamma = 0.5, \quad \lambda = 10, \quad a = 0.004.$$

On prendra garde au fait que, contrairement aux apparences, les courbes ne se croisent pas.

3. Points fixes

On s'intéresse ici aux situations d'équilibre statique du système. Il est naturel de poser le problème en termes de distances : on note d_i la quantité $x_{i+1} - x_i$. Il s'agit de trouver les $N + 1$ distances d_0, d_1, \dots, d_N telles que (on se place toujours dans l'hypothèse $x_0 = 0, x_{N+1} = 1$)

$$(2) \quad \varphi(d_i) - \varphi(d_{i-1}) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

avec

$$\sum_{i=0}^N d_i = 1.$$

On a donc nécessairement

$$(3) \quad \varphi(d_i) = \text{constante}.$$

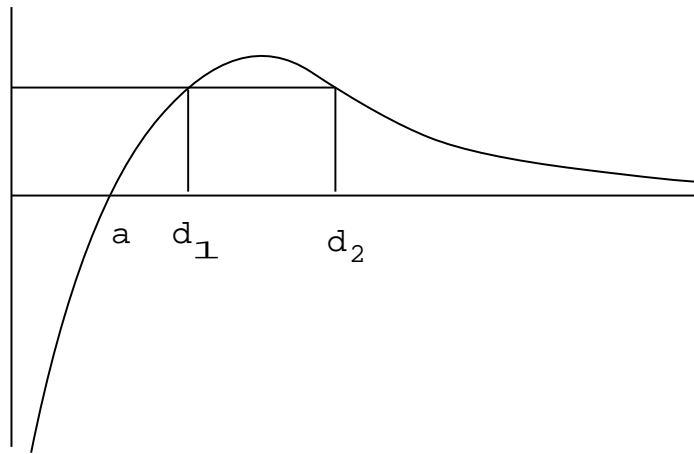


Fig. 2 : Fonction φ .

On distingue deux cas.

- (1) *Population dense.* Si l'on a $N + 1 \geq 1/a$, alors nécessairement l'une des distances est inférieure ou égale à a , et par suite toutes le sont d'après (3) et le fait que $\varphi(d)$ est négatif si et seulement si $d \leq a$. On a dans ce cas une solution unique correspondant à $d_i = \text{constante} = 1/(N + 1)$.
- (2) *Population dispersée.* Si l'on a $N + 1 < 1/a$, alors au moins l'une des distances est strictement supérieure à a , et par suite toutes le sont par un raisonnement analogue au précédent. On a toujours ici la solution $d_i = \text{constante} = 1/(N + 1)$, mais elle n'est pas nécessairement unique. La différence avec le cas dense est que φ n'est pas injective

sur $]a, +\infty[$. Il est naturel d'introduire la notion suivante : on dit que les distances d_1 et d_2 sont conjuguées si $\varphi(d_1)$ est égal à $\varphi(d_2)$ (voir figure 2). On se ramène ainsi à la recherche d'entiers N_1 et N_2 tels que $N_1 + N_2 = N + 1$, et de 2 réels d_1 et d_2 conjugués, tels que

$$N_1 d_1 + N_2 d_2 = 1.$$

Toute configuration telle que N_1 distances sont égales à d_1 , et les N_2 autres égales à d_2 est alors solution statique du problème.

Par exemple dans le cas d'une unique hématie (c'est-à-dire 3 hématies en comptant les extrémités fixes), on a trois configurations statiques : hématie proche de l'extrémité 0 (en x tel que x et $1 - x$ soient conjugués), hématie proche de 1 (en $1 - x$), et hématie au centre (en $1/2$).

Suggestions pour le développement

- ▶ *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
- Proposer d'autres méthodes pour résoudre numériquement le système différentiel de la section 2.
- Poursuivre la discussion sur la recherche de points fixes dans le cas dispersé.
- Étudier la stabilité des points fixes du système. (On pourra commencer par étudier la stabilité des trois points fixes du système à une seule particule libre).
- Étudier (numériquement ou théoriquement) le modèle (plus réaliste) qui serait basé sur l'hypothèse que la fonction φ est nulle au-delà d'une certaine distance.
- Étudier à l'aide du modèle proposé une situation de milieu dense, c'est-à-dire telle que les distances initiales entre les centres des hématies sont de l'ordre de leur taille a . On pourra notamment essayer de mettre en évidence (numériquement ou théoriquement) la présence de phénomènes de propagation d'ondes.