COURS UM6P
ANNEE 2020-2021

Laurent Dumas

CHAPITRE 1

INTERPOLATION POLYNOMIALE

L'objectif de ce premier chapitre est de présenter les différentes méthodes d'approximation par interpolation polynomiale d'une fonction réelle f connue en un nombre fini $(n+1)$ de points. Une fois établies au paragraphe 1 l'existence et l'unicité d'un polynôme d'interpolation de degré n, la détermination d'un algorithme de construction de celui-ci et l'étude de l'erreur commise sur le reste du domaine de définition de f sont ensuite abordées dans les trois paragraphes suivants. Le paragraphe 5 reprend le problème initial mais en approchant à présent la fonction f par une fonction polynômiale par morceaux.

1.1 Interpolation polynomiale de Lagrange. Définition

Le théorème suivant résout le problème de l'existence et de l'unicité d'un polynôme d'interpolation en $(n+1)$ points de degré inférieur à n (ensemble noté $\mathbf{P}_n$dans tout le chapitre) :

Théorème 1. *: soit $n \in \mathbf{N}$. On considère une famille $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $(n+1)$ points distincts et f une fonction définie en ces points. Alors*

$$\exists! P \in \mathbf{P}_n \ / \ \forall i \in \{0, ..., n\}, \quad P(x_i) = f(x_i) \tag{1}$$

Démonstration.

Existence : on définit correctement la famille de polynômes $(l_i)_{0\leq i\leq n}$ de $\mathbf{P}_n$ par :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

Soit alors le polynôme P suivant :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x) \tag{2}$$

Par construction, P est élément de $\mathbf{P}_n$ et satisfait pour tout $i \in \{0, ..., n\}$:

$$P(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) l_j(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \delta_{i,j} = f(x_i).$$

Unicité : soient P et Q deux polynômes vérifiant la propriété (1). Le polynôme $R = P - Q \in \mathbf{P}_n$ est tel que

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad R(x_i) = 0$$

ce qui implique pour des raisons de degré que $R = 0$, soit $P = Q$ $\square$

Définition 1. *P (également noté P_n ou $P_n(f)$) s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$. La famille de polynômes $(l_i)_{0 \leq i \leq n}$ utilisée dans la démonstration précédente forme une base de $\mathbf{P}_n$ (utiliser pour cela la propriété $l_j(x_i) = \delta_{i,j}$) et s'appelle la famille des polynômes de base de Lagrange associée aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$.*

Remarques :

1. Il existe un théorème analogue permettant de construire un polynôme coincidant avec f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et dont les premières dérivées en ces points sont aussi égales à celles de f : on parle alors d'interpolation d'Hermite (voir TD).

2. La démonstration du Théorème 1 donne également une expression de l'inverse de la matrice de Vandermonde :

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

En effet, soit $b = {}^t(b_0, ..., b_n)$ un vecteur colonne de $\mathbf{R}^{n+1}$: l'existence et l'unicité d'un vecteur colonne $a = {}^t(a_0, ..., a_n)$ tel que $V(x_0, ..., x_n)a = b$ correspond exactement à l'existence et l'unicité d'un polynôme P :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

tel que
$$\forall i \in \{0,...,n\}, \quad P(x_i) = b_i.$$
Le Théorème 1 assure ainsi le caractère inversible de $V(x_0,...,x_n)$. On peut ensuite calculer son inverse en utilisant les polynômes de base de Lagrange associés aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. On décompose tout d'abord ceux-ci dans la base canonique de $\mathbf{P}_n$:

$$l_i(x) = \sum_{j=0}^{n} u_{i,j} x^j$$

puis on remarque que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i l_i(x) = \sum_{j=0}^{n} (\sum_{i=0}^{n} b_i u_{i,j}) x^j.$$

Par identification des coefficients du polynôme, il vient

$$a_j = \sum_{i=0}^{n} b_i u_{i,j}$$

soit de manière matricielle $a = {}^t U b$ en notant $U = [u_{i,j}]_{0\leq i,j\leq n}$. On conclut alors que
$$V(x_0,...,x_n)^{-1} = {}^t U.$$

1.2 Algorithme de construction du polynôme d'interpolation

1.2.1 Formule de Newton

La formule (2) vue au paragraphe précédent donnant l'expression du polynôme d'interpolation d'une fonction f dans la base des polynômes de base de Lagrange est lourde et mal adaptée à un rajout éventuel de points. Le but de ce paragraphe est d'en donner une expression récursive dans une autre base. On introduit pour cela la notion de différences divisées :

Définition 2. *On appelle différence divisée d'ordre n de f aux points $(x_k)_{0\leq k\leq n}$, notée $f[x_0,...,x_n]$, le coefficient (éventuellement nul) de x^n dans le polynôme d'interpolation de f en ces mêmes points.*

Par exemple, on a $f[x_0] = f(x_0)$ et $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ car d'après la relation (2) :
$$P_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Les deux théorèmes suivants vont permettre de fournir un algorithme efficace de construction de P_n à partir des différences divisées de f :

Théorème 2. *: avec les notations précédentes, on a la relation récursive suivante :*

$$\forall j \in \{1,...,n\}, \quad f[x_0,...,x_j] = \frac{f[x_1,...x_j] - f[x_0,...,x_{j-1}]}{x_j - x_0}.$$

Démonstration. : Soit $Q_{j-1} \in \mathbf{P}_{j-1}$ le polynôme de Lagrange de f associé aux points $(x_i)_{1\leq i\leq j}$ et soit

$$\tilde{P}(x) = \frac{(x-x_0)Q_{j-1}(x) - (x-x_j)P_{j-1}(x)}{x_j - x_0} \tag{3}$$

On montre que $\tilde{P}$ est le polynôme de Lagrange de f associé aux points $(x_i)_{0\leq i\leq j}$. En effet :

$$\begin{cases} \tilde{P}(x_0) = P_{j-1}(x_0) = f(x_0) \\ \tilde{P}(x_k) = \dfrac{(x_k - x_0)f(x_k) - (x_k - x_j)f(x_k)}{x_j - x_0} = f(x_k) \quad \text{lorsque } 1 \leq k \leq j-1 \\ \tilde{P}(x_j) = Q_{j-1}(x_j) = f(x_j) \end{cases}$$

En calculant ensuite grâce à la formule (3) le coefficient de degré j de $\tilde{P}$, on obtient bien le résultat annoncé □

Théorème 3. *: le polynôme interpolateur de f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ peut s'écrire de la manière suivante (formule de Newton) :*

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{j=1}^{n} f[x_0,...,x_j](x-x_0)...(x-x_{j-1}).$$

Démonstration. : La démonstration s'effectue par récurrence sur n. Lorsque n=0, on a bien

$$P_0(x) = f(x_0) = f[x_0].$$

Ensuite, pour passer du rang n au rang $n+1$, on remarque que $P_{n+1} - P_n \in \mathbf{P}_{n+1}$ est tel que

$$\forall i \in \{0,...,n\}, \quad (P_{n+1} - P_n)(x_i) = 0.$$

Ainsi :
$$(P_{n+1} - P_n)(x) = \lambda(x - x_0)...(x - x_n).$$
Par définition des différences divisées, on a en outre :
$$\lambda = f[x_0, ..., x_{n+1}].$$
En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang n, le résultat au rang $n+1$ est alors bien assuré □

1.2.2 Description de l'algorithme des différences divisées

La construction du polynôme interpolateur de Lagrange d'une fonction f aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ consiste d'abord à calculer les $(n+1)$ différences divisées d'ordre 1 : $f[x_0], ..., f[x_n]$ (en les rangeant dans la première colonne d'un tableau triangulaire) puis à l'aide de celles-ci et grâce au Théorème 2, les n différences divisées d'ordre 2 : $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$, ...,$f[x_{n-1}, x_n]$ rangées dans la deuxième colonne du tableau, et ainsi de suite jusqu'au calcul de l'unique différence divisée d'ordre $(n+1)$, $f[x_0, ...x_n]$, placée au sommet du triangle ainsi construit.

Le polynôme P_n est alors obtenu à partir du Théorème 3 en appliquant la méthode d'évaluation de Horner plus économique et plus précise que la méthode d'évaluation usuelle (voir [Dem] pour une estimation de l'erreur d'arrondi commise) : on construit par récurrence descendante la suite $(u_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que
$$\begin{cases} u_n = f[x_0, ..., x_n] \\ u_k = f[x_0, ..., x_k] + (x - x_k)u_{k+1} \quad (0 \leq k < n-1) \end{cases}$$
pour aboutir à
$$u_0 = P_n(x).$$
Cet algorithme peu coûteux présente également l'avantage d'être récursif ce qui permet le cas échéant de pouvoir rajouter facilement un ou plusieurs points d'interpolation. Un exemple d'implémentation de celui-ci sera vu en TP.

1.2.3 Cas des points équidistants

Le cas particulier des points équidistants permet de donner une expression simplifiée de la formule de Newton basée sur l'opérateur suivant :

Définition 3. *On appelle opérateur aux différences finies progressives, l'application*

$$\Delta : \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n \\ (f_i)_{0\le i\le n} \mapsto ((\Delta f)_i)_{0\le i\le n-1} \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

telle que $(\Delta f)_i = f_{i+1} - f_i$.

Proposition 1. *soit* $(x_i)_{0\le i\le n}$ *une famille de points telle que*

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \quad x_i = x_0 + ih$$

et f *une fonction réelle. On note* $f_i = f(x_i)$*. Alors :*

$$\forall (i,k) \in \{0,\dots,n\}^2, \quad 0 \le i \le i+k \le n \Rightarrow f[x_i, \dots x_{i+k}] = \frac{1}{k!h^k}(\Delta^k f)_i \qquad (4)$$

Le polynôme d'interpolation de f *aux points* $(x_i)_{0\le i\le n}$ *peut alors s'écrire en un point* $x = x_0 + sh$ *quelconque :*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k f)_0 \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}.$$

Démonstration. : La démonstration de la relation (4) s'effectue par récurrence sur k : lorsque k=0, on a bien

$$f[x_i] = f(x_i) = \frac{1}{0!h^0}(\Delta^0 f)_i.$$

Pour passer du rang k—1 au rang k, on écrit (en utilisant en particulier le Théorème 2) :

$$\begin{aligned}(\Delta^k f)_i &= (\Delta^{k-1} f)_{i+1} - (\Delta^{k-1} f)_i \\ &= (k-1)!h^{k-1} f[x_{i+1}, \dots x_{i+k}] - (k-1)!h^{k-1} f[x_i, \dots x_{i+k-1}] \\ &= (k-1)!h^{k-1}(x_{i+k} - x_i) f[x_i, \dots x_{i+k}]\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité recherchée.

L'expression simplifiée du polynôme P_n se déduit alors immédiatement du Théorème 3

□

1.3 Erreur d'interpolation

Le présent paragraphe propose deux estimations de l'erreur commise en remplaçant f par son polynôme d'interpolation P_n associé aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$, en un point x quelconque appartenant à l'intervalle de définition de f (noté $[a,b]$) :

$$E_n(f)(x) = f(x) - P_n(x)$$

La première estimation est ponctuelle tandis que la seconde est globale sur $[a,b]$ et résulte d'un résultat de stabilité.

1.3.1 Estimation ponctuelle

Théorème 4. *: soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ et $x \in [a,b]$. Il existe $\zeta_x \in c(\{x_0,...,x_n,x\})$ (enveloppe convexe de l'ensemble de points) tel que*

$$E_n(f)(x) = \frac{\Pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

avec

$$\Pi_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

En particulier,

$$|E_n(f)(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |\Pi_n(x)| ||f^{(n+1)}||_{L^\infty([a,b])} \tag{5}$$

Démonstration. : Le cas où $x = x_i$ étant évident, on peut supposer que $x \notin \{x_0,...,x_n\}$ sans perdre de généralité. On définit alors le polynôme $Q_{n+1} \in \mathbf{P}_{n+1}$ comme suit :

$$Q_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{E_n(f)(x)}{\Pi_n(x)} \Pi_n(t).$$

Ainsi, pour tout $i \in \{0,...,n\}$, $Q_{n+1}(x_i) = P_n(x_i) = f(x_i)$ et

$$Q_{n+1}(x) = P_n(x) + E_n(f)(x) = f(x)$$

Q_{n+1} est donc égal au polynôme de Lagrange de f aux points $(x_0,...,x_n,x)$. En particulier, la fonction $F(t) = f(t) - Q_{n+1}(t)$ s'annule $(n+2)$ fois. Par le théorème de Rolle appliqué de manière itérée, $F^{(n+1)}$ s'annule donc une fois en un point $\zeta_x \in$ c$(\{x_0, ..., x_n, x\})$ ce qui donne :

$$0 = F^{(n+1)}(\zeta_x) = f^{(n+1)}(\zeta_x) - \frac{E_n(f)(x)}{\Pi_n(x)}(n+1)!$$

soit exactement le résultat recherché □

À noter qu'un corollaire utile peut être déduit de ce théorème :

Corollaire 1. *soit $(x_i)_{0 \le i \le n}$ une famille de points distincts et f une fonction réelle. Alors,*

$$\exists \zeta \in \text{c}(\{x_0, ..., x_n\}) \quad / \quad f[x_0, ...x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

Démonstration. : Grâce à la formule de Newton (Théorème 3) et en conservant les notations du théorème précédent, on peut écrire que le polynôme interpolateur de f aux points $(x_i)_{0 \le i \le n}$ est égal à

$$P_n(t) = P_{n-1}(t) + f[x_0, ..., x_n]\Pi_{n-1}(t).$$

En particulier, pour $t = x_n$, on a

$$f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = f[x_0, ..., x_n]\Pi_{n-1}(x_n)$$

En utilisant alors le Théorème 5 pour la famille $(x_i)_{0 \le i \le n-1}$ au point $x = x_n$, on obtient bien le résultat annoncé □

1.3.2 Estimation globale

Définition 4. *Soit la fonction réelle $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$. La constante de Lebesgue associée aux points $(x_i)_{0 \le i \le n}$ est définie par la formule*

$$\Lambda_n = ||\lambda_n||_{L^\infty([a,b])}.$$

La proposition suivante donne un résultat de stabilité faisant intervenir Λ_n comme facteur d'amplification d'erreur :

Proposition 2. *soit l'opérateur L_n défini entre les espaces vectoriels $C^0([a,b],\mathbf{R})$ et $\mathbf{P}_n$ tous deux munis de la norme infinie sur $[a,b]$, associant à f son polynôme d'interpolation P_n aux points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$. Ainsi défini, L_n est un opérateur continu et*

$$|||L_n||| = \Lambda_n.$$

Démonstration. : En utilisant la relation (2) et la définition de Λ_n, on obtient dans un premier temps

$$\forall x \in [a,b], \quad |P_n(x)| \leq ||f||_\infty \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| \leq \Lambda_n ||f||_\infty$$

soit

$$|||L_n||| \leq \Lambda_n.$$

Réciproquement, soit $z \in [a,b]$ tel que $|\lambda_n(z)| = \Lambda_n$ et soit g une fonction affine par morceaux, de norme unité et telle que $g(x_i) = \mathrm{sgn}(l_i(z))$ pour tout $i \in \{0,...,n\}$. On a

$$\begin{aligned} L_n(g)(z) &= \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(z) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(z)| = \lambda_n(z) = \Lambda_n \\ &\leq |||L_n||| \cdot ||g||_\infty = |||L_n||| \end{aligned}$$

ce qui clôt la démonstration de la proposition □

Théorème 5. *en conservant les notations précédentes, on a*

$$\forall f \in C^0([a,b]) \quad ||E_n(f)||_{L^\infty([a,b])} \leq (1+\Lambda_n) \inf_{Q\in\mathbf{P}_n} ||f-Q||_{L^\infty([a,b])}.$$

Démonstration. : Il suffit d'écrire

$$||f-P_n|| \leq ||f-Q|| + ||Q-P_n|| = ||f-Q|| + ||L_n(f-Q)||$$

et d'utiliser l'inégalité démontrée dans la proposition précédente □

1.4 Convergence du polynôme d'interpolation

1.4.1 Cas général

Aucune des deux estimations du paragraphe précédent ne permet de conclure à la convergence en un certain sens de P_n vers f lorsque n tend vers l'infini. En effet, dans la relation (5), si f est indéfiniment dérivable, $\frac{|\Pi_n(x)|}{(n+1)!}$ converge bien uniformément vers 0 quel que soit le choix des points d'interpolation mais $||f^{(n+1)}||_{L^\infty([a,b])}$ peut diverger vers $+\infty$.

De même, dans le Théorème 5, on ne peut déduire le comportement de $||f-P_n||_\infty$ lorsque n tend vers l'infini car

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{Q\in\mathbf{P}_n}||f-Q||_{L^\infty([a,b])}\right)=0$$

par le théorème de Stone Weierstrass mais on peut montrer que pour toute famille de points

$$\lim_{n\to+\infty}\Lambda_n=+\infty.$$

Une étude de la convergence au cas par cas s'avère donc nécessaire.

1.4.2 Condition suffisante de convergence

Il existe des cas favorables où le Théorème 5 assure la converge uniforme du polynôme d'interpolation vers la fonction initiale lorsque le nombre de points d'interpolation tend vers l'infini (quelle que soit la position de ces points). Ceci est par exemple le cas pour la fonction $f(x)=e^x$: en effet, on a alors

$$\forall n\in\mathbf{N},\quad ||f^{(n+1)}||_{L^\infty([a,b])}=e^b$$

et en majorant $|\Pi_n(x)|$ par $(b-a)^{n+1}$, on obtient

$$||E_{n+1}(f)||_\infty\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^b.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}||E_{n+1}(f)||_\infty=0$. On montre qu'une condition suffisante de convergence peut être énoncée ainsi (voir [Dem] pour une démonstration) :

Théorème 6. *: soit $f\in C^\infty([a,b])$ une fonction analytique représentée par une série entière centrée en $c=\frac{a+b}{2}$ et de rayon de convergence $R>\frac{3}{2}(b-a)$. Alors, le polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé à des points d'interpolation quelconques $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ dans $[a,b]$ converge uniformément vers f.*

1.4.3 Cas de non convergence : le phénomène de Runge

Il existe des fonctions analytiques pour lesquelles le polynôme d'interpolation associé à un certain choix de points ne converge même pas ponctuellement vers cette fonction lorsque le nombre de points tend vers l'infini. Le contre-exemple le plus célèbre (connu sous le nom de phénomène de Runge) est donné par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

pour des points d'interpolation équirépartis sur le segment $[-5,5]$. Dans ce cas, on observe une non convergence de $E_n(f)(x)$ aux points situés près des extrémités de l'intervalle (voir TP pour une illustration graphique du phénomène ou [Dem] pour une justification).

1.4.4 Influence du choix des points d'interpolation

Le choix des points d'interpolation est très important pour la qualité de l'approximation. La meilleure stratégie a priori consiste à prendre des points d'interpolation sur $[a,b]$ minimisant $||\Pi_n||_{L^\infty([a,b])}$ (avec Π_n défini dans le Théorème 4). On montre que sur l'intervalle $[-1,1]$, de tels points optimaux correspondent aux racines des polynômes de Tchebychev

$$x_i = \cos((2i+1)\frac{\pi}{2n+2}) \quad (0 \leq i \leq n)$$

pour lesquels

$$||\Pi_n||_\infty = \frac{1}{2^n}.$$

Par comparaison, pour des points équirépartis sur le même intervalle, on a (voir TD) :

$$C_1(\frac{2}{e})^n \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} \leq ||\Pi_n||_\infty \leq C_2(\frac{2}{e})^n \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}.$$

De même, dans l'estimation uniforme du Théorème 5,

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n$$

pour le choix des points de Tchebychev (il s'agit aussi d'un choix quasi optimal pour la constante de Lebesgue) tandis que

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{en\ln n}$$

pour un choix de points équidistants.

À noter enfin que le Théorème 6 peut être amélioré pour ces deux répartitions particulières de points : il suffit d'avoir

$$R > (\frac{1}{e} + \frac{1}{2})(b-a)$$

pour les points équirépartis et

$$R > (\frac{1}{4} + \frac{1}{2})(b-a)$$

pour les points de Tchebychev pour assurer la convergence du polynôme d'interpolation (voir [Dem]).

1.5 Interpolation polynomiale par morceaux

Au vu des exemples précédents de non convergence du polynôme d'interpolation de Lagrange, il peut s'avérer plus intéressant d'interpoler une fonction continue, non pas par une fonction polynomiale globale mais par une fonction régulière et polynomiale par morceaux. Les deux cas les plus usuels sont présentés ici.

1.5.1 Interpolation affine par morceaux

Soit $s = \{x_0, ..., x_{n+1}\}$ une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. On note

$$\delta(s) = \max_{i \in \{0,...,n\}} |x_{i+1} - x_i|$$

Pour toute fonction f définie sur $[a, b]$, on construit g^s l'unique application sur $[a, b]$ telle que (i) $\forall i \in \{0, ..., n\}$, $g^s_{ß[x_i, x_{i+1}]}$ est affine.

(ii)$\forall i \in \{0, ..., n+1\}$, $g^s(x_i) = f(x_i)$. On a le résultat suivant :

Théorème 7. *: soit $f \in C^0([a, b], \mathbf{R})$ et une famille de subdivisions $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \delta(s_n) = 0$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} ||g^{s_n} - f||_{L^\infty([a,b])} = 0.$$

Démonstration. : On utilise l'uniforme continuité de f :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \nu > 0, \quad \forall (u,v) \in [a,b]^2, \quad |u-v| \leq \nu \Rightarrow |f(u)-f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $x \in [a,b]$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note x_1^n et x_2^n deux éléments consécutifs de s^n tels que $x_1^n \leq x \leq x_2^n$. Pour n assez grand, on a $|x_2^n - x_1^n| < \nu$ et ainsi

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)ß &\leq |f(x)-f(x_1^n)| + |f(x_1^n)-g(x_1^n)| + |g(x_1^n)-g(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 0 + |g(x_1^n)-g(x_2^n)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration □

1.5.2 Interpolation par splines cubiques

Lorsque $n \in \mathbf{N}$, on note $s = \{x_0, ..., x_{n+1}\}$ une subdivision de $[0,1]$ telle que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$. Une fonction ϕ définie sur $[0,1]$ est dite s-spline cubique si $\phi \in C^2([0,1], \mathbf{R})$ et si pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $\phi_{|[x_k, x_{k+1}]}$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à trois. On note E_s l'ensemble de telles fonctions.

On met en évidence deux isomorphismes entre les epaces vectoriels E_s et $\mathbf{R}^{n+4}$:

Théorème 8. *: l'application*

$$u : \begin{pmatrix} E_s \to \mathbf{R}^{n+4} \\ \phi \mapsto (\phi(0), \phi'(0), \phi''(0), \phi'''(0), \phi_d'''(x_1), ..., \phi_d'''(x_n)) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. : u est trivialement une application linéaire. Soit $\phi \in \mathrm{Ker}(u)$: comme $\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$, ϕ est bien nulle sur $[0, x_1]$ (étant un polynôme de degré au plus 3 sur cet intervalle). Comme $\phi \in C^2([0,1], \mathbf{R})$, on a $\phi(x_1) = \phi'(x_1) = \phi''(x_1) = 0$. En remarquant qu'en outre $\phi_d'''(x_1) = 0$, ϕ est également nulle sur $[x_1, x_2]$ pour les mêmes raisons que précédemment. Ce raisonnement répété permet de montrer que $\phi = 0$ sur $[0,1]$.
u est en outre surjective : considérant $\alpha = (a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+4}$, on construit une fonction ϕ telle que :

sur $[0, x_1]$, $\phi(x) = a + bx + c\dfrac{x^2}{2} + d\dfrac{x^3}{6}$.

sur $[x_1, x_2]$, $\phi(x) = P_1(x)$ où P_1 est l'unique polynôme de $\mathbf{P}_3$ tel que

$$(P_1(x_1), P_1'(x_1), P_1''(x_1), P_1'''(x_1)) = (\phi(x_1), \phi_g'(x_1), \phi_g''(x_1), \alpha_1)$$

et ainsi de suite jusqu'à l'intervalle $[x_n, 1]$. Ainsi construite, $\phi \in E$ et $u(\phi) = \alpha$ $\square$

Théorème 9. *: l'application*

$$v : \begin{pmatrix} E_s \to \mathbf{R}^{n+4} \\ \phi \mapsto (\phi(0), \phi(x_1), ..., \phi(x_n), \phi(1), \phi'(0), \phi'(1)) \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. : Il suffit, grâce au théorème précédent, de montrer que v est injective. Pour simplifier les calculs, ce résultat est uniquement établi ici pour une subdivision régulière (soit pour $x_k = \dfrac{k}{n+1}$). Soit donc $\phi \in E$ telle que

$$(\phi(0), \phi(\frac{1}{n+1}), ..., \phi(\frac{n}{n+1}), \phi(1), \phi'(0), \phi'(1)) = (0, 0, ..., 0).$$

Pour tout $k \in \{0, ..., n+1\}$, on note $\alpha_k = \phi(x_k)$ et $\beta_k = \phi'(x_k)$ et on montre que tous ces coefficients sont nuls. Ceci suffit pour conclure que $\phi = 0$ car l'application

$$\Theta : \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 \to \mathbf{R}^4 \\ P \mapsto (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{pmatrix}$$

est injective (si $P \in \mathbf{P}_3$ est tel que $P(a) = P'(a) = P(b) = P'(b) = 0$, alors $(x-a)^2(x-b)^2$ divise P, ce qui implique bien $P = 0$).

Pour cela, soit P_k $(0 \le k \le n)$ l'unique polynôme (de $\mathbf{P}_3$) coincidant avec ϕ sur $[x_k, x_{k+1}]$. On décompose P_k ainsi :

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_{i,k}(x - x_k)^i.$$

En écrivant les relations

$$\begin{cases} \lambda_{0,k} = \alpha_k; \quad \lambda_{1,k} = \beta_k \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{3} \lambda_{i,k} \frac{1}{(n+1)^i} = \alpha_{k+1}; \quad \sum_{i=1}^{3} i\lambda_{i,k} \frac{1}{(n+1)^{i-1}} = \beta_{k+1} \end{cases} \qquad 0 \le k \le n$$

il est possible d'exprimer $P_k''(x_k) = 2\lambda_{2,k}$ en fonction des coefficients α_k et β_k.

Après combinaisons linéaires et substitutions (et avec l'hypothèse que $\alpha_k = 0$), on obtient

$$P_k''(x_k) = -2(n+1)(2\beta_k + \beta_{k+1}).$$

En reprenant le même calcul à partir de la décomposition de P_k suivante :

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{3} \mu_{i,k}(x - x_{k+1})^i$$

on trouve de même que

$$P_k''(x_{k+1}) = 2(n+1)(2\beta_{k+1} + \beta_k).$$

En utilisant alors la propriété que $\phi \in C^2([0,1], \mathbf{R})$, il vient les relations :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \beta_{k-1} + 4\beta_k + \beta_{k+1} = 0$$

ce qui se traduit matriciellement par la relation

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\beta_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice $n \times n$ de ce système est inversible (car à diagonale strictement dominante) et que $\beta_0 = \beta_{n+1} = 0$ par hypothèse, on a bien $\beta_k = 0$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ ce qui clôt la démonstration □

Remarque : L'interpolation par splines cubiques permet d'approcher uniformément une fonction f. On peut montrer en outre que si $f \in C^4([0,1], \mathbf{R})$, l'unique fonction ϕ s-spline cubique (avec s subdivision régulière de pas $\frac{1}{n+1}$) telle que $\nu(\phi) = \nu(f)$ (où l'application ν a été correctement prolongée) vérifie :

$$\begin{cases} ||f - \phi||_{L^\infty([0,1])} = O(\frac{1}{n^4}) \\ ||f' - \phi'||_{L^\infty([0,1])} = O(\frac{1}{n^3}) \\ ||f'' - \phi''||_{L^\infty([0,1])} = O(\frac{1}{n^2}) \end{cases}$$

De plus, ϕ peut être déterminée numériquement de manière efficace car elle est issue de l'inversion d'une matrice tridiagonale symétrique définie positive (méthodes à voir en algèbre linéaire numérique).