

(public 2010)

**Résumé :** Issu de considérations statistiques, le krigeage est une technique d'interpolation qui permet de retrouver d'autres méthodes classiques comme les splines

**Mots clefs :** Interpolation, approximation, moindres carrés

---

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

Le krigeage est une technique d'interpolation et de modélisation géométrique qui tire son origine de méthodes géostatistiques, développées empiriquement dans les années cinquante par l'ingénieur minier sud-africain D.Krige, puis formalisées et popularisées par le Français G. Matheron.

Il peut par exemple s'agir de prévoir la valeur prise par un phénomène naturel en un site à partir d'observations ponctuelles en des sites voisins (citons : densité de minerai dans des échantillons de sol, hauteur de précipitations mesurées en des stations météorologiques, concentration de gaz carbonique en certains points ...). L'aspect statistique inhérent au krigeage n'est pas abordé : nous nous limitons à présenter le krigeage comme une technique d'interpolation.

La variante exposée ici est dite du krigeage dual. Cette méthode s'étend facilement aux cas bidimensionnels et tridimensionnels.

## 1. Interpolation unidimensionnelle

### 1.1. Présentation

Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  un entier naturel non nul,  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $n$  points distincts  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) de cet intervalle. On se donne  $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$  (en général des valeurs d'échantillonnage d'une fonction  $u$ ) et on cherche une fonction  $\hat{u}$  vérifiant  $\forall j = 1, \dots, n \hat{u}(x_j) = u_j$ .

On choisit un espace vectoriel de fonctions de dimension finie  $k$ , de base  $p_0, \dots, p_{k-1}$ , par exemple l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à  $k - 1$  avec  $p_j(x) = x^j$ , et on cherche  $\hat{u}$  sous la forme

$$\hat{u}(x) = d(x) + w(x)$$

avec

$$d(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i p_i(x) \quad \text{et} \quad w(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(|x - x_j|)$$

en imposant la condition

$$\forall i = 0, \dots, k-1 \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j p_i(x_j) = 0$$

La partie  $d(x)$  est appelée dérive, elle modélise une première approximation du comportement général de la fonction  $u$  à interpoler. La figure 1 présente différentes dérivées ; il faut noter que une fois la forme de la dérive choisie, ses coefficients dépendent de la fonction  $\phi$ . La figure 2 présente les interpolations réalisées pour une même dérive affine et différentes fonctions  $\phi$ .

La fonction  $w$  dite fluctuation aléatoire corrige la dérive en permettant à la courbe de passer par les points d'approximation.

Les coefficients  $(a_0, \dots, a_{k-1})$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  sont alors solutions du système linéaire suivant

$$(1) \quad \begin{pmatrix} C & P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha = {}^t[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ ,  $a = {}^t[a_0, \dots, a_{k-1}]$ ,  $C$  est la matrice  $n \times n$  de terme général  $c_{ij} = \phi(|x_i - x_j|)$ ,  $P$  est la matrice  $n \times k$  de terme général  $p_j(x_i)$ .

Un choix approprié de la fonction  $\phi$  permet d'assurer que le système a une unique solution.

La résolution du système linéaire peut parfois être simplifiée grâce aux remarques suivantes : Si la fonction  $\phi$  est multipliée par une constante, la fonction  $a$  reste inchangée tandis que  $\alpha$  est divisé par la même constante ; si  $p_0 = 1$  et si l'on ajoute une constante à chaque coefficient de la matrice  $C$ , la solution du système est inchangée.

## 1.2. Splines

**Définition 1.** Soit  $\sigma = (x_j)_{j=1 \dots n}$  une subdivision de  $[a, b]$

$$x_1 = a < x_2 < \dots < x_n = b$$

On appelle spline cubique sur  $[a, b]$  toute fonction  $s : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  vérifiant

- $s$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$
- sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$   $s$  est la restriction d'une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3

Il existe une unique spline  $s$  de  $S_\sigma$  vérifiant  $s(x_j) = u_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n$  et  $s''(a) = s''(b) = 0$  ; on l'appelle spline cubique naturelle. C'est l'unique fonction qui réalise le minimum de l'énergie de flexion : précisément, si  $F$  est l'ensemble des fonctions  $f \in C^2$  sur  $[a, b]$  vérifiant  $f(x_j) = u_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $s$  est l'unique fonction telle que

$$\int_{[a,b]} (s''(x))^2 dx = \min_{f \in F} \int_{[a,b]} (f''(x))^2 dx$$

On peut montrer que c'est la fonction obtenue par krigeage en choisissant une dérive affine et une fonction  $\phi(h) = h^3$ .

## 2. Extension du modèle

### 2.1. Distance d'influence

Dans les exemples vus plus haut, la matrice  $C$  est pleine ; le choix de  $\phi(h) = h$  ou  $\phi(h) = h^3$  ne permet d'annuler que les coefficients diagonaux de  $C$ . D'autre part, il est intuitivement clair que l'interpolation souhaitée en un point  $x$  (voir les exemples en introduction) dépend plus fortement des points de collocation situés dans le voisinage immédiat de  $x$  que des points plus éloignés.

Si l'on désire augmenter l'influence des points de collocation situés dans le voisinage immédiat de  $x$  (et diminuer le nombre de termes non nuls de la matrice  $M$ ), on peut introduire une distance d'influence au delà de laquelle la fonction  $\phi$  s'annule, par exemple

$$\phi(h) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{h}{d}\right)^3 & \text{si } 0 \leq h \leq d \\ 0 & \text{si } h > d \end{cases}$$

Cette définition assure la continuité de  $\phi$  ; on peut la modifier légèrement pour rendre  $\phi$  dérivable. La figure 3 montre l'effet de la distance d'influence : si on réduit la valeur de  $d$  la courbe a tendance à osciller.

### 2.2. Effet pépite :

Ce nom rappelle que la méthode tire son origine de problèmes de prospection minière. Pour ne pas conclure trop vite à un gisement d'or dans le voisinage d'une pépite isolée, on peut être amené à diminuer l'influence d'une donnée marginale ou aberrante en ajoutant à la matrice  $C$  une matrice diagonale  $D$  avec  $d_{i,i}$  d'autant plus grand qu'on veut moins tenir compte du point  $(x_i, u_i)$  dans l'interpolation. Lorsque l'effet pépite devient important, on obtient un problème de moindres carrés pondérés (cf fig 4). Plus précisément, on ajoute à  $C$  une matrice diagonale  $\beta D$  et on fait tendre  $\beta$  vers  $+\infty$ . Le système (1) s'écrit alors

$$(2) \quad \begin{cases} (C + \beta D)\alpha + Pa & = U \\ {}^t P \alpha & = 0 \end{cases}$$

ce qui implique

$$(3) \quad {}^t P(C + \beta D)^{-1} Pa = {}^t P(C + \beta D)^{-1} U$$

**Théorème 1.** Lorsque  $\beta$  tend vers  $+\infty$ , la solution de (3) tend vers celle de

$${}^t P D^{-1} Pa = {}^t P D^{-1} U$$

En particulier, si  $D$  est la matrice identité, la dérive n'est autre que la droite des moindres carrés.

La démonstration utilise le fait que si  $\beta$  est suffisamment grand, le rayon spectral de la matrice  $M(\beta) = \frac{1}{\beta} D^{-1} C$  est strictement inférieur à 1, ce qui permet d'affirmer que  $I + M(\beta)$  est inversible, d'inverse  $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k M(\beta)^k$

### 3. Courbes paramétrées

On souhaite, par exemple pour reconstituer des courbes de niveau, interpoler un ensemble de points du plan  $A_j = (x_j, y_j), j = 1, \dots, n$  par une courbe paramétrée  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) t \in [a, b]$ . On commence par construire une suite  $t_j$  des valeurs du paramètre  $t$  de telle sorte que  $\gamma(t_j) = A_j$  puis on résout les deux systèmes linéaires de même matrice. Pour construire la suite  $t_j$ , un choix naturel (paramétrage par longueur de courbe) est le suivant :

$$t_1 = 0$$
$$\forall j = 1, \dots, n-1 \quad t_{j+1} = t_j + \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$$

L'exemple présenté en (5) et (6) , (courbe fermée, dérive affine et  $\phi(h) = h^3$ ) montre comment on peut corriger le caractère non lisse au premier noeud en répétant les derniers noeuds avant les premiers et les premiers après les derniers. Ici, on a pris

$$x_{n-1}, x_n = x_1, \dots, x_n = x_1, x_2, x_3$$
$$y_{n-1}, y_n = y_1, \dots, y_n = y_1, y_2, y_3$$

### Suggestions pour le développement

- ▶ *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
  - On pourra démontrer les résultats relatifs aux splines et comparer les méthodes d'obtention de la spline par la méthode "classique" (recherche des coefficients du polynôme sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ ) et le krigeage.
  - On pourra démontrer le théorème 1
  - On pourra illustrer l'effet de la distance d'influence et l'effet pépète.
  - On pourra présenter des exemples de constructions de courbes paramétrées en dimension 2 et 3
  - On pourra étendre le krigeage dual en plusieurs dimensions en remplaçant  $\phi(h)$  par  $\phi(\|h\|_2)$ . On obtient l'équivalent des splines cubiques en prenant  $\phi(h) = h \ln h$  en dimension 2 et  $\phi(h) = h$  en dimension 3.

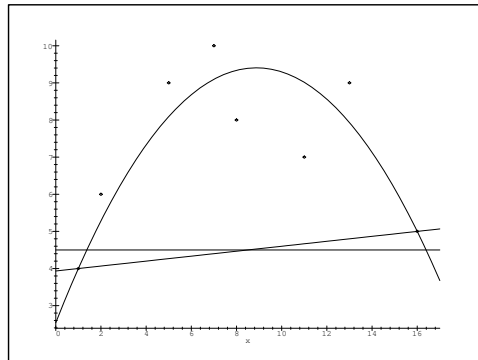


FIG. 1. exemple de dérive constante, affine, quadratique

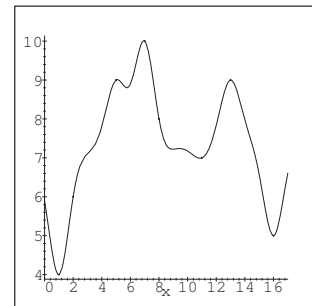
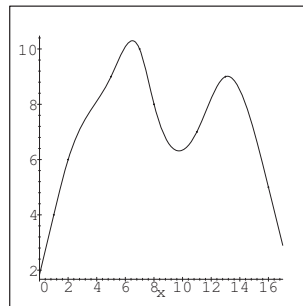
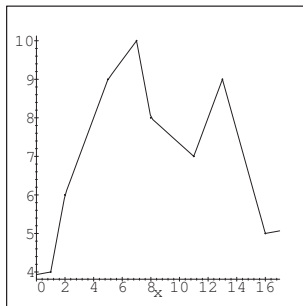


FIG. 2. dérive affine ;  $\phi(h) = h$  ;  $\phi(h) = h^3$  ;  $\phi(h) = \exp(-h^2)$

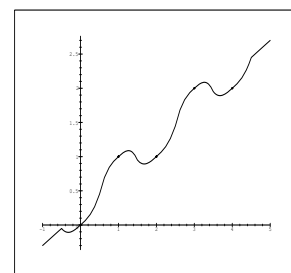
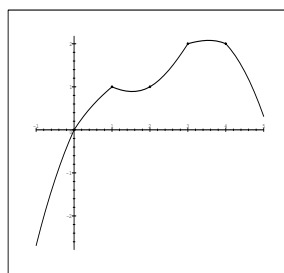
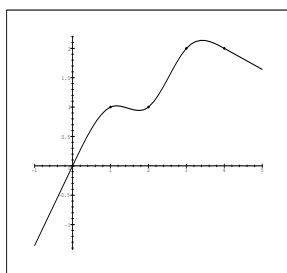


FIG. 3. effet de la distance d'influence

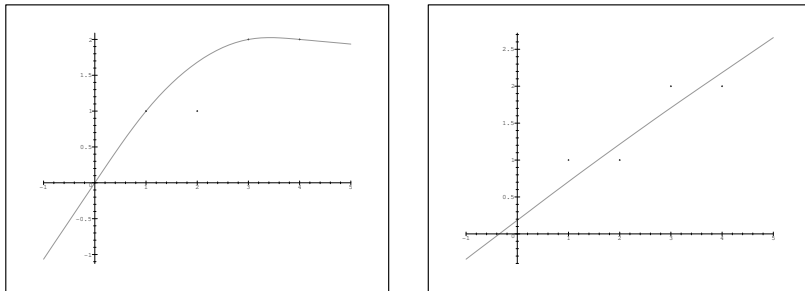


FIG. 4. effet pépite

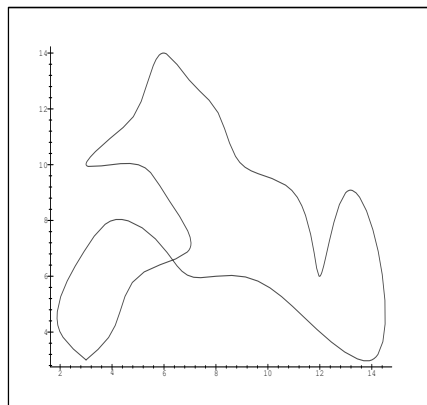


FIG. 5. sans superposition des points

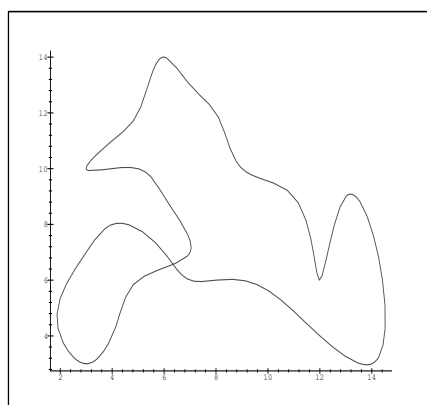


FIG. 6. avec superposition des points