Mathématiques

Composition n° 1

15 octobre 2014

Durée : 2h

- **L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.**
- **Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.**
- **Si le candidat découvre en cours d'épreuve ce qu'il croît être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.**
- **L'épreuve comporte deux exercices**

Bon succès.

NOM : PRÉNOM :

Sauvagardez votre script sous le nom NOM_NO-EXO.sci et envoyez-le par email à l'adresse bernhard.elsner@math.uvsq.fr. Sujet de l'email : Côntrole 1 MA350.

Exercice 1 — *Sonde spatiale*

Dans cet exercice la terre (masse 5.972×10^{24} kg) et la lune (masse 7.3477×10^{22} kg) sont assimilés à des points qui tournent, dans un plan et à distance fixe, autour de leur centre de gravité O. On utilise un système de coordonnées orthonormées (x, y) d'origine O qui accompagne ce mouvement de rotation de sorte que la terre (resp. lune) a des coordonnées fixes $(-a, 0)$ (resp. $(b, 0)$) avec $a, b > 0$. On normalise comme suit : l'unité de longueur est la distance entre la lune et la terre ; l'unité de temps est telle que la vitesse angulaire de la rotation vaut 1 ; autrement dit, le laps de temps de pour un tour complet est 2π.
Avec ces notations le mouvement d'une sonde spatiale de petite masse qui se trouve dans le même plan est régi par le système

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} - \dfrac{b(x+a)}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \dfrac{a(x-b)}{[(x-b)^2+y^2]^{3/2}} \\ \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - \dfrac{by}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} - \dfrac{ay}{[(x-b)^2+y^2]^{3/2}} \end{cases}$$

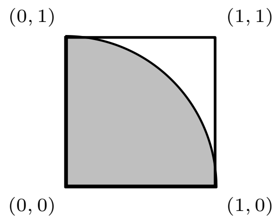
Tracer la trajectoire d'une sonde avec les conditions initiales

$$x(0) = 1.2 \qquad y(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = -1.04936$$

Quelle est sa période ?

Exercice 2 — *Calcul probabiliste de π*

On peut calculer une valeur approchée de π par la *méthode Monte-Carlo*.



1. Question sans ordinateur : On choisit au hasard un point (x, y) dans le carré $[0, 1]^2$ et on note p la probabilité qu'il se trouve à l'intérieur du quart de cercle donné par $x^2 + y^2 < 1$. Combien vaut p ?

L'idée de la méthode Monte-Carlo est la suivante : Lorsqu'on fait n fois l'expérience ci-dessus, la proportion des points qui tombent à l'intérieur du quart de cercle tend vers p quand $n \to \infty$.

2. Chercher des renseignements sur la commande `rand`. Puis écrire une procédure `ApproxPi` qui prend comme argument un nombre naturel n et qui calcule une approximation de π par la méthode Monte-Carlo. Tester pour $n = 10000$. La méthode vous semble-t-elle efficace ?

Corrigé de l'exercice 1 — *Sonde spatiale*

D'abord on détermine les constantes a et b qui sont les distances respectives de la terre et de la lune à leur centre de gravité. Donc on a $a\times$ masse de la terre $= b\times$ masse de la lune. En plus $a+b=1$, et on calcule sans peine

```
mt=5.972E24, ml=7.3477E22
a=ml/(mt+ml); b=1-a
```

Résolution du problème de Cauchy :

```
deff('dy = sonde(t,y)',
     'dy(1)=y(3);
      dy(2)=y(4);
      dy(3)=y(1)+2*y(4)-b*(y(1)+a)*((y(1)+a)^2+y(2)^2)^(-3/2)-a*(y(1)-b)*((y(1)-b)^2+y(2)^2)^(-3/2);
      dy(4)=y(2)-2*y(3)-b*y(2)*((y(1)+a)^2+y(2)^2)^(-3/2)-a*y(2)*((y(1)-b)^2+y(2)^2)^(-3/2)');
// position et vitesse initiales
init=[1.2;0;0;-1.04936];
// temps de simulation
temps=0:.01:7;
// Resolution de l'equation differentielle
sol=ode(init,0,temps,sonde);
// Plot de la solution
clf()
plot2d(sol(1,:),sol(2,:))
plot2d(-a,0,-3)
xstring(-a,0,"Terre")
plot2d(b,0,-3)
xstring(b,0,"Lune")
```

La trajectoire semble se refermer sur elle-même. Donc on se pose la question de sa période. En plottant pour `k=1:100:701` les points `plot2d(sol(1,k),sol(2,k),-2)` on voit que la période de la sonde est entre 6 et 7. Pour obtenir une valeur plus précise on peut faire la boucle suivante

```
k=600
while (sol(1,k)-b)^2+sol(2,k)^2>(sol(1,k+1)-b)^2+sol(2,k+1)^2 // carré de la distance au point (b,0)
    k=k+1
end, disp(k)
```

On trouve $k=620$, donc la période est environ 6.2. Autrement dit, la sonde revient à sa position initiale par rapport à la terre et la lune un peu plus tôt que ces deux corps célestes reviennent à leurs positions initiales dans l'espace.

Corrigé de l'exercice 2 — *Calcul probabiliste de π*

1. Evidemment $p=\dfrac{\pi}{4}$.

2. On fait une boucle où n est le nombre d'essais de points et chaque fois qu'un point tombe dans le quart de cercle on incrémente le nombre s de succès par 1.

```
function p=ApproxPi(n)
    s=0 //compteur
      for k=1:n
      x=rand()
      y=rand()
      if x^2+y^2<1 then s=s+1
      end
    p=4*s/n
end
endfunction
```

La convergence est trop lente pour être viable.