

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DES ÉCOULEMENTS SANGUINS À PARTIR DE DONNÉES EXPÉRIMENTALES

LAURENT DUMAS¹, EDOUARD OLLIER², ERWAN BOZEC, PIERRE BOUTOUYRIE³

RÉSUMÉ. A partir de mesures expérimentales non invasives réalisées avec le principe d'échotracking, on montre ici comment il est possible de reconstruire numériquement le réseau artériel d'un patient donné. L'approche choisie consiste à utiliser un modèle fluide-structure simplifié pour chaque artère et à fixer les différents paramètres du réseau en résolvant un problème inverse. On présente ici les premiers résultats de reconstruction numérique du réseau artériel des membres inférieurs d'un patient sain. Cette approche permet en particulier de déterminer la rigidité de chaque artère, facteur déterminant pour le diagnostic des risques cardiovasculaires.

Mots clés. artères, modèles fluide-structure, problèmes inverses.

1. INTRODUCTION

La simulation tridimensionnelle des écoulement sanguins en interaction fluide structure a atteint ces dernière années un haut niveau de réalisme. Cependant leur coût computationnel encore très important est l'un des principaux obstacles à leur utilisation clinique. Si on néglige l'aspect tridimensionnel du problème en faisant l'hypothèse d'une symétrie cylindrique pour les artères et d'un profil parabolique pour l'écoulement, il est possible d'utiliser des modèles monodimensionnels bien plus intéressants du point de vue du temps de calcul et ainsi de pouvoir résoudre un problème inverse basé sur des mesures expérimentales non invasives. Ces dernières consistent à mesurer par un principe d'échographie Doppler, le diamètre et la vitesse centrale en quelques points du réseau artériel du patient considéré.

Dans les sections 2 et 3, on présente respectivement le modèle mathématique et les données expérimentales utilisées. Les premiers résultats de reconstruction du réseau des membres inférieurs d'un patient sain sont ensuite exposés dans la section 4.

2. MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE L'ÉCOULEMENT SANGUIN

Le modèle monodimensionnel d'écoulement sanguin est obtenu par intégration des équations de Navier-Stokes sur chaque section transverse d'une artère (voir Figure 1). Pour une artère donnée, on obtient alors le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_r \frac{Q}{A} &= 0\end{aligned}$$

1. Laboratoire de Mathématiques de Versailles, laurent.dumas@uvsq.fr

2. Ecole des Mines de Saint Etienne, ollier@messel.emse.fr

3. Université Paris Descartes, INSERM U970, Assistance Publique Hôpitaux de Paris HEGP
erwan.bozec@egp.aphp.fr, pierre.boutouyrie@egp.aphp.fr

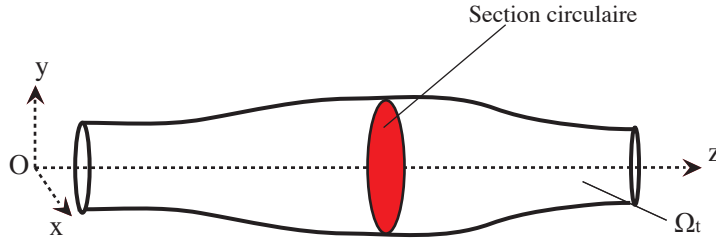


FIGURE 1. Modèle simplifié d'artère.

où $A(t, z)$ est l'aire de la section de l'artère considérée et $Q(t, z)$ le débit sanguin à l'instant $t \in [0, T]$ et à la position longitudinale $z \in [0, L]$.

Pour clore ce système, on définit un loi de pression, ici la loi linéaire élastique suivante :

$$P - P_{ext} = \beta \left(\sqrt{A(z, t)} - \sqrt{A_0} \right)$$

Les coefficients K_r et β apparaissant dans le modèle sont liés respectivement à la viscosité sanguine et aux propriétés élastiques de la paroi artérielle. En particulier, β peut être interprété comme un coefficient de rigidité de l'artère, proportionnel au module de Young.

En imposant un système de conditions de continuité aux bifurcations (voir [1, 2] pour plus de détails), il est ensuite possible de modéliser des réseaux artériels complets comme celui de la Figure 2.

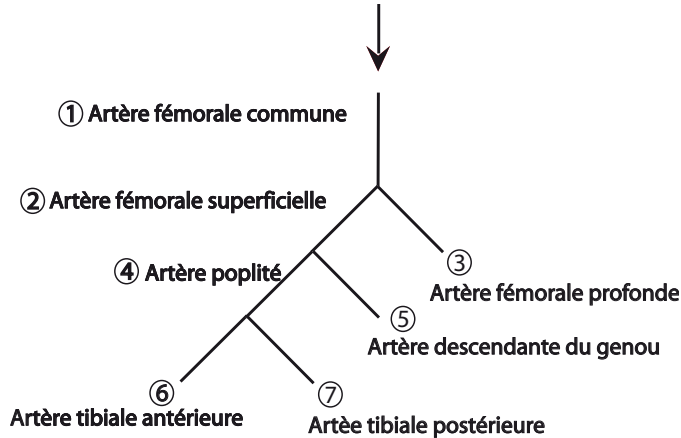


FIGURE 2. Réseau artériel des membres inférieurs.

Pour chaque artère, on peut récrire le système sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial z} = B(U)$$

où $U = [A, Q]^T$ est le vecteur des variables conservatives, $F = [F_A, F_Q]^T$ les flux correspondants et $B = [B_A, B_Q]^T$ le terme source. On a donc :

$$F(U) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + \frac{\beta}{3\rho} A^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}, \quad B(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_r \frac{Q}{A} \end{bmatrix}$$

Ce système est hyperbolique car la matrice jacobienne des flux :

$$H = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \frac{Q^2}{A^2} + \frac{\beta}{2\rho} A^{\frac{1}{2}} & 2 \frac{Q}{A} \end{bmatrix}$$

est diagonalisable et possède 2 valeurs propres distinctes.

Le système est complété par des conditions aux limites appropriées à chaque extrémité du réseau. Au niveau de l'extrémité proximale, un profil de pression peut être appliqué. Aux niveaux des extrémités distales, des conditions aux bords de type résistance modélisant le reste du réseau en aval, sont imposées (voir [2]).

Des premiers travaux de validation du modèle simplifié par rapport à des simulations tridimensionnelles ont déjà été réalisés (voir [3, 4]). Ceux-ci ont permis de montrer une bonne reproduction des résultats initiaux moyennant un choix optimal des constantes du modèle, principalement du paramètre β de rigidité de l'artère.

3. DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Nous avons choisi ici de nous intéresser au réseau artériel des membres inférieurs représenté sur la Figure 2. Les données expérimentales utilisées sont issues d'un examen d'échotracking réalisé au centre PARCC de l'Hôpital Européen Georges Pompidou. Il s'agit d'un procédé permettant de suivre l'onde systolique grâce à des enregistrements echo-doppler en différents points de l'arbre artériel (voir [5]). Ces enregistrements donnent accès, entre autres, aux profils de diamètre interadventiciel et de vitesse du sang au centre de l'artère (voir un exemple sur la Figure 3).

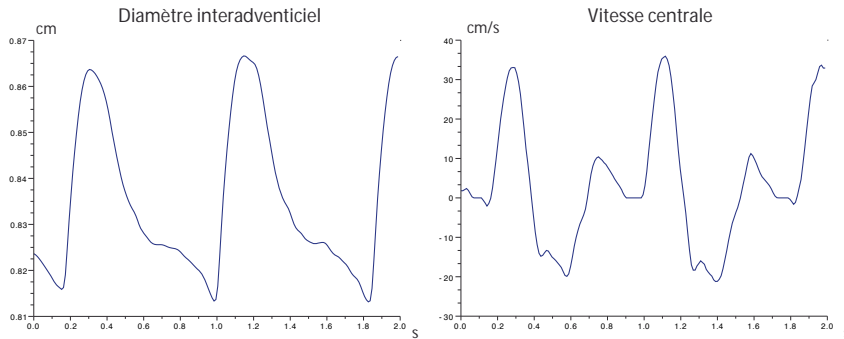


FIGURE 3. Exemples de données expérimentales mesurées par echotracking.

4. RÉSULTATS

La résolution du problème inverse est basée sur la minimisation d'une fonction coût comparant les données simulées et les enregistrements. Ici, seule l'information sur les vitesses a été utilisée. La fonction coût à minimiser est donc la suivante :

$$J_Q^2(\psi) = \sum_{k \in \{1,2,4,6\}} \frac{\|\tilde{V}_k(\psi) - V_{k,echo}\|_{L_2}}{\|V_{k,echo}\|_{L_2}}$$

où $\tilde{V}_k(\psi)$ est la vitesse moyenne simulée au centre de la k-ième artère ($\tilde{V} = \frac{Q}{A}$) et $V_{k,echo}$ celle mesurée par echotracking. Les 11 paramètres $\psi = (\beta_1, \dots, \beta_7, R_3, R_5, R_6, R_7)$ sur lesquels sont réalisés l'optimisation sont :

- 7 coefficients de rigidité pour les 7 artères du réseaux : $\beta_i, i \in \{1, \dots, 7\}$.
- 4 résistances en sortie de réseau : $R_i, i \in \{3, 5, 6, 7\}$.

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2

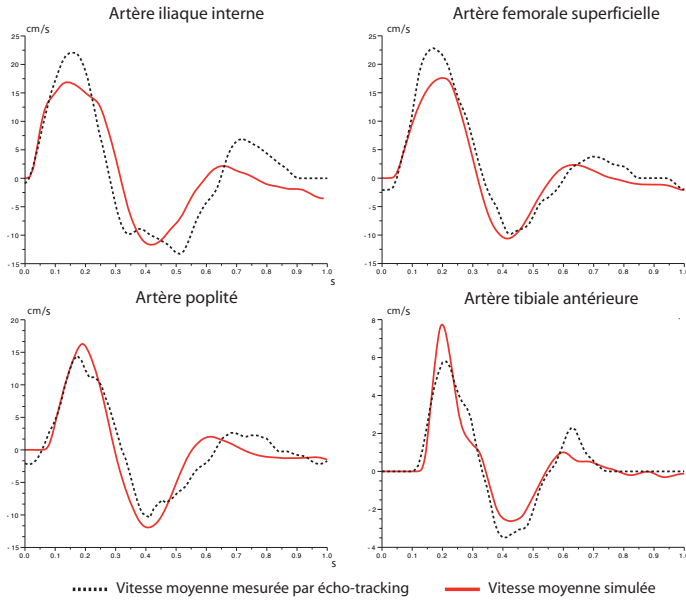


FIGURE 4. Comparaison des vitesses expérimentales et numériques après optimisation.

La méthode d'optimisation utilisée dans ce travail, appelée EGO, est basée sur un méta-modèle de krigeage pour approcher la fonction coût (voir [6] pour plus de détails).

Les profils de vitesse obtenus en optimisant la fonction coût J_Q^2 sont présentés sur la Figure 4. Il ressort de l'observation de cette figure que les résultats expérimentaux et numériques sont très proches pour chacune des artères du réseau. De plus, on peut observer sur la Figure 5 une bonne corrélation également au niveau des profils de section (ou de diamètre) des artères. A noter qu'une telle qualité de résultats n'a pu être observée qu'avec des paramètres ψ optimisés et que ceux-ci sont fortement variables d'un patient à un autre.

Patient 1 : résultats obtenus avec la fonction J_Q^2

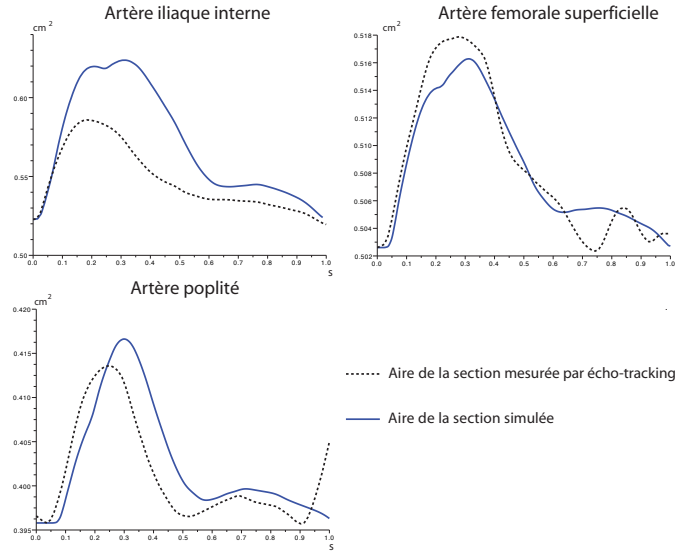


FIGURE 5. Comparaison des sections expérimentales et numériques après optimisation.

5. CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons reconstruit numériquement le réseau artériel du membre inférieur d'un patient donné à partir d'enregistrements par echotracking. Il a été possible de reproduire fidèlement les profils de vitesse et de diamètre de ce patient et de déterminer ainsi les principales caractéristiques mécaniques de ses artères. Cette première étude ouvre la voie à l'aide au diagnostic précoce de maladies cardio-vasculaires par simulation numérique grâce à des mesures expérimentales non invasives.

RÉFÉRENCES

- [1] L. Formaggia, F. Nobile and A. Quarteroni, A One Dimensional Model for Blood Flow : Application to Vascular Prosthesis, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, 2002, 19, 137-153.
- [2] J. Alastruey, K.H. Parker, J. Peiro, S.J. Sherwin, Lumped parameter outflow models for 1-D blood flow simulations : Effect on pulse waves and parameter estimation, *Communications in Computational Physics*, 2008, 4(2), p. 317-336.
- [3] V. Martin, F. Clément, A. Decoene and J.F. Gerbeau, Parameter identification for a one-dimensional blood flow model, *Esaim Proc.*, 2005, 14, 174-200.
- [4] L. Dumas, An optimal model of blood flow in arteries, *proceedings of Conference on Engineering Optimization*, Rio de Janeiro, ENGOPT 2008.
- [5] Beaussier H, Naggara O, Calvet D, Joannides R, Guegan-Massardier E, Gerardin E, Iacob M, Laloux B, Bozec E, Bellien J, Touze E, Masson I, Thuillez C, Oppenheim C, Boutouyrie P, Laurent S., Mechanical and structural characteristics of carotid plaques by combined analysis with echotracking system and MR imaging, *JACC Cardiovasc Imaging.*, 2011, 4(5), 468-477.
- [6] D. Jones, M. Schonlau, W. Welch, Efficient global optimization of expensive black box functions. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13(4), 455-492.