Ecole Centrale Paris
Equations différentielles et systèmes Dynamiques
(Electif 10)
Tahar Z. Boulmezaoud
(tahar.boulmezaoud@uvsq.fr)
Année 2013–2014

Problème de N corps

On considère N corps supposés ponctuels, de masses $m_1, ..., m_N$. On note par $\boldsymbol{r}_i(t)$ la position du corps i, $1 \leq i \leq N$, par rapport à un repère galiléen de départ. On suppose que tous ces corps sont en mouvement uniquement à cause des forces de gravitation exercées mutuellement. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, on obtient le système de N équations différentielles de second ordre suivant :

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}(t) = -\sum_{1\leq j\leq N,\, j\neq i} \mu_j \frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3},\ \ i = 1, ..., N, \tag{1}$$

où on a posé $\mu_j = Gm_j$ pour tout $j = 1, ..., N$. A l'instant initial $t = 0$, les positions $\boldsymbol{r}_i(0)$ et les vitesses $\dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}(0)$, pour $i = 1, ..., N$, sont considérées comme des données. Les positions initiales sont deux à deux distinctes.

I. Généralités

1. Montrer que ces équations découlent de l'équation d'Euler-Lagrange associée à un problème de calcul de variation qu'on explicitera.
   Indication : on peut utiliser l'énergie cinétique T et la fonction de force V :
   $$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right)^2,\ V(t) = \sum_{1\leq j<k\leq N} \frac{Gm_jm_k}{|\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k|}.$$
2. Que peut-on dire de la fonction $H(t) = T(t) - V(t)$?
3. Soit $\boldsymbol{r}(t)$ la position du centre de masse définie par :
   $$M\boldsymbol{r}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i(t), \tag{2}$$
   où $M = m_1 + ... + m_N$. Décrire l'évolution de $\boldsymbol{r}(t)$ en fonction du temps. Dans toute la suite de cette section, on se place dans un repère dont l'origine est le centre de masse du système (et supposé donc immobile).
4. On introduit le moment angulaire $\boldsymbol{K}$ et le moment polaire d'inertie I définis par :
   $$\boldsymbol{K}(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i(t) \times \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt},\ I(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i|\boldsymbol{r}_i(t)|^2.$$

(a) Montrer que $\boldsymbol{K}$ est constant.

(b) Montrer la relation :

$$\frac{d^2 I}{dt^2}(t) = 2V(t) + 4H. \tag{3}$$

5. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une solution bornée du système (1) sur $[0, +\infty[$ est que $H < 0$.
6. On dit qu'une collision simultanée générale arrive à l'instant t_0 si tous les $\boldsymbol{r}_i(t)$ tendent vers une même limite $\boldsymbol{r}_0$ quand t tends vers t_0. Montrer que dans ce cas, on a nécessairement $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$ (indication : pour cette dernière égalité, on peut utiliser (3) et une majoration de $\boldsymbol{K}$ en fonction de I et T).

II. Cas de 2 corps.

On se place ici dans le cas particulier où $N = 2$.

1. Soit $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système. On définit le deux vecteurs $\bar{\boldsymbol{r}}$ et $\boldsymbol{r}$ par

$$M\bar{\boldsymbol{r}}(t) = m_1\boldsymbol{r}_1(t) + m_2\boldsymbol{r}_2(t), \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t).$$

Trouver l'expression de $\bar{\boldsymbol{r}}(t)$ en fonction des données initiales et de t. Trouver l'équation différentielle régissant $\boldsymbol{r}(t)$.

2. On pose $h(t) = \boldsymbol{r} \times \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ et $\boldsymbol{P}(t) = -\mu\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{h} \times \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, où $\mu = GM$. Montrer que ces vecteurs sont indépendants du temps. En déduire que le mouvement des deux corps est plan. Exprimer $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{P}$ en fonction des conditions initiales.

3. On pose $P = ||\boldsymbol{P}|| = (\boldsymbol{P}.\boldsymbol{P})^{1/2}$ et $h = ||\boldsymbol{h}||$ et on introduit le repère direct $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ défini par

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{P}}{P}, \quad \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{h}}{h}, \quad \text{et } \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i}. \tag{4}$$

(on supposera que $h \neq 0$ et $P \neq 0$). Soit $\theta(t)$ l'angle compris entre $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{r}(t)$. Montrer que :

$$\frac{r_0}{r} = 1 + e\cos\theta, \tag{5}$$

et que :

$$\theta'(t) = \frac{h}{r^2(t)}. \tag{6}$$

où le paramètre $e = \dfrac{P}{\mu}$ est appelé l'excentricité. Déterminer la nature de la trajectoire relative du corps (1) par rapport au corps (2) en fonction du paramètre e. Décrire entièrement le cas $e = 0$.

4. Si $e = 1$, montrer qu'à tout instant $t \geq 0$, $\tan\dfrac{\theta(t)}{2}$ est solution de l'équation de $3^{\text{ème}}$ degré suivante :

$$X^3 + 3X = 6\omega_0 t - 4. \tag{7}$$

où ω_0 est une constante qu'on exprimera en fonction de μ et h.
Montrer que l'équation précédente admet une et une seule racine dans $\mathbb{R}$. Trouver cette racine

5. Si $0 < e < 1$, la trajectoire relative est en effet une ellipse. OA et OB sont respectivement les valeurs minimales et maximales de $r(t)$ sur cette ellipse. Soient C le milieu du segment $[AB]$ et S le sommet de l'ellipse (voir figure 1). Soit Γ le cercle de rayon

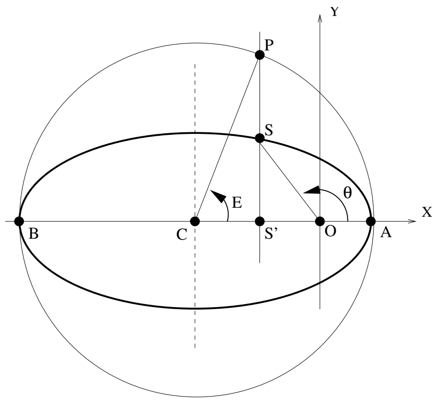

FIGURE 1 – Une trajectoire elliptique.

   $a = CA$ et de centre C. Soit S la position du corps 1 sur l'ellipse et S' sa projection sur l'axe des x. On note P l'intersection de la demi-droite $[S', S)$ avec le cercle Γ et E l'angle $(\vec{CA}, \vec{CP})$.
   Quel est l'intervalle décrit par $E(t)$ quand $\theta(t)$ décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$? Montrer l'égalité :
   $$\cos E(t) = \frac{r}{a} \cos\theta(t) + e. \tag{8}$$
   Soit $E_0 = E(0)$. Exprimer $\sin E_0$ et $\cos E_0$ en fonction de e.
6. Montrer à partir de (8) l'égalité
   $$\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta(t)} = 1 - e\cos E(t). \tag{9}$$
7. La trajectoire est décrite dans le sens des E croissants, i. e., $E'(t) > 0$. Montrer que $E(t)$ est solution à tout instant t de
   $$E - e\sin E = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}\omega_0 t + E_0 - e\sin E_0 \tag{10}$$
   Quelle est la période T_0 du mouvement en fonction de e et ω_0 ?
   L'équation (10) est appelée l'équation de KEPLER.
8. Trouver une méthode numérique pour résoudre l'équation de Kepler
   $$x - e\sin x = A, \tag{11}$$
   quand $0 < e < 1$ (on montrera d'abord qu'elle admet une unique solution).
9. Facultatif : Traiter le cas $e > 1$.

III. Étude numérique.

On revient au cas général, $N \geq 2$.

1. Proposer un schéma numérique pour résoudre le système ci-dessus dans le cas général.
2. Écrire un programme associé.
3. Tester les performances de programme en s'appuyant sur le cas $N = 2$ (pour différentes valeurs de e et du pas de temps).
4. On considère le problème (dit de Pythagore) suivant : trois corps de masses respectives 3, 4 et 5 sont initialement au *repos* et placés aux points $(1, 3)$, $(-2, -1)$ et $(1, -1)$ d'un plan (x, y). Simuler le mouvement de ces trois corps et visualiser leurs trajectoires dans l'intervalle de temps $50 \leq t \leq 60$ et dans l'intervalle $60 \leq t \leq 70$. Que se passe-t-il ? **(dans cette question, le temps, les longueurs et les masses sont considérées adimensionnés, ce qui revient à supposer que $G = 1$).**

Remarque — on pourra appliquer cela au système solaire. On a les donnée suivantes :

Masse du soleil : $M = 1.9981 \times 10^{30} kg$, constante gravitationnelle :
$G = 6.672 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$,
l'année sédérale = 365.25 jours.

La distance moyenne entre la terre et le soleil est notée a_0 et vaut $a_0 = 1.495978 \times 10^{11} m$. On l'appelle l'unité astronomique (U. A.). On a les données ci-dessous :

Planéte	Masse 10^{24}kg	e	$\frac{a}{a_0}$
Mercure	0.33022	0.20563	0.38710
Vénus	4.86900	0.00677	0.72330
Terre	5.97420	0.01673	1
Mars	0.64191	0.0934	1.523710
Jupiter	1898.8	0.04849	5.21021
Saturne	568.50	0.05555	9.53807
Uranus	86.625	0.04629	19.18330
Neptune	102.78	0.0089	30.05514
Pluton	0.015	0.25088	39.53758
Cométe de Halley	XXXX	0.96728	17.94