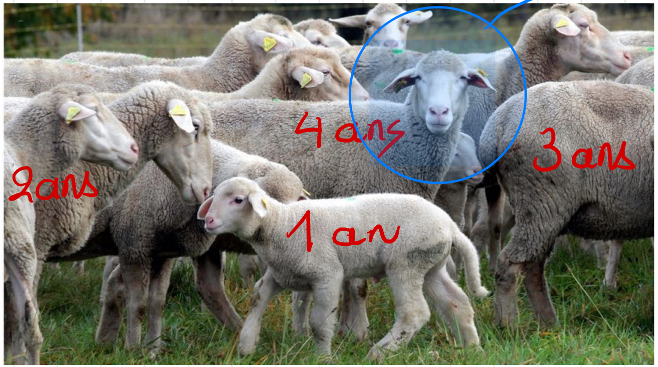
Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Texte 3 : une histoire de moutons

* **Objectif** : gérer et optimiser un élevage de moutons
* **Exemple étudié** : on veut déterminer le meilleur âge pour l'abattage et la vente de moutons tout en maintenant un equilibre dans la taille du troupeau
* **Outils mathématiques** :
  Algèbre linéaire (valeurs propres)



Etape 1 : modélisation de l'évolution du troupeau

* On effectue une modélisation structurée en âge.

* $$x^{n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

moutons entre 0 et 1 an

moutons entre $(m-1)$ et m années

année : n

* Le troupeau évolue chaque année en fonction de la fertilité et du taux de survie de chaque classe :

$$\boxed{x^{n+1} = A x^{n}}$$ avec :

taux de fertilité à l'année i

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ \sigma_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{3,2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

taux de survie de l'année i à l'année $i+1$

Etape 2 : Evolution du troupeau sans abattage

* On a :

$$\boxed{x^n = A^n x^0}$$ avec $x^0 \in (\mathbb{R}_+)^m$.

* Le théorème de Perron-Frobenius appliqué à A indique :

→ A possède une valeur propre simple égale à $\rho(A)$ et toutes ses autres valeurs propres sont de module strictement inférieur.

* En fonction de la valeur de $\rho(A)$, on a donc :

↗ $\rho(A) > 1$: la population augmente

→ $\rho(A) = 1$: la population est stable

↘ $\rho(A) < 1$: la population diminue

* Dans tous les cas, la répartition par classe converge en proportion :

$$\boxed{\lim \frac{x^n}{\|x^n\|_1} = e \in \mathbb{R}_+^m}$$

Etape 3 : un nouveau critère pour connaître l'évolution du troupeau.

* On cherche ici un critère plus simple que $\rho(A)$ pour savoir comment évoluera le troupeau.

* On note :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \sigma_{2,1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \sigma_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_m \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

* On définit à bon droit :

$$R = \rho\left(F(I-T)^{-1} \right)$$

et on montre après calculs :

$$\boxed{R = f_1 + \sigma_{2,1} f_2 + \cdots + \sigma_{2,1}\sigma_{3,2}\cdots\sigma_{m,m-1} f_m}$$

* On montre ensuite :

$$\rho\left(T + \frac{F}{R}\right) = 1$$

et on en déduit :

$\nearrow$ $R > 1$: la population augmente

$\rightarrow$ $R = 1$: la population est stable

$\searrow$ $R < 1$: la population diminue

Etape 4 : meilleure stratégie d'abattage

* L'objectif est de ramener la valeur de $\rho(A)$ (ou R) à 1 en rajoutant un taux d'abattage à une année donnée :

$$A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & & f_m \\ \sigma_{2,1} & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \sigma_{i+1,i} - \varphi & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Abattage au taux : φ à l'année i

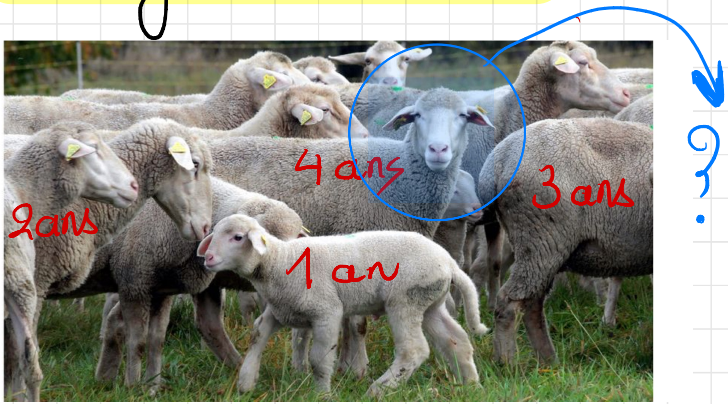
* Calcul de la meilleure stratégie :

→ Pour chaque année i, on calcule le taux φ tel que $R(\varphi) = 1$

→ on calcule avec la nouvelle matrice A_{φ_i} l'évolution limite du troupeau (limite $x^\infty \in \mathbb{R}^m$).

→ on détermine l'année i pour laquelle la valeur $\varphi_i * x_i^\infty$ est maximale

Etape 5 : simulation avec le logiciel Scilab



→ 12 classes d'âge, 540 moutons

→ $x^0 = 10*(10,12,4,3,5,4,3,4,5,2,1,1)$

→ fécondité et taux de survie fixés

→ vente de viande possible pour les âges entre 1 et 4 ans.

Pour aller plus loin :

→ Autres exemples :

* modèles non linéaire avec cannibalisme.
* modèles structurés en taille

Référence :

www.agreg.org

(texte de modélisation, 2014)