Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Texte 13 : activité électrique d'un neurone

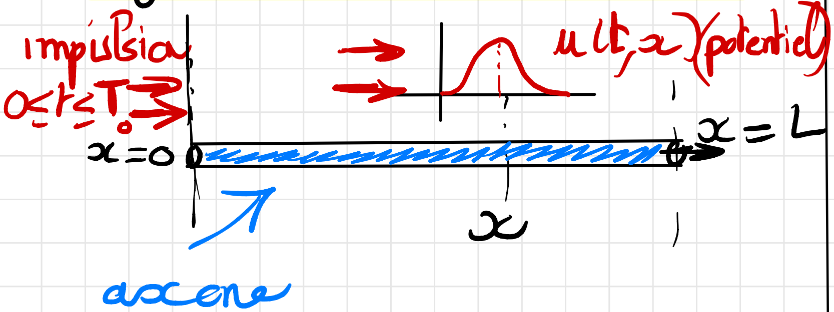
* Objectif : modéliser la propagation de l'influx nerveux dans un neurone
* Exemple étudié : on cherche à calculer comment réagit un neurone à une impulsion électrique et à mettre en évidence la notion de seuil d'activation.

* Outils mathématiques :
équations aux dérivées partielles

(100 milliards de neurones)

impulsion électrique

Etape 1 : modélisation de la propagation du potentiel électrique



Le modèle phénoménologique de Hodgkin et Huxley (1950) cherche à reproduire les phénomènes suivants observés expérimentalement :

→ propagation d'une onde progressive le long de l'axone à partir d'une excitation à l'une de ses extrémités

→ effet de seuil par rapport à l'intensité de l'excitation.

Le modèle (réaction-diffusion) s'écrit :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u) - w \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= \varepsilon(\beta u - \gamma w) \end{aligned}}$$

avec $f(u) = u(1-u)(u-a)$

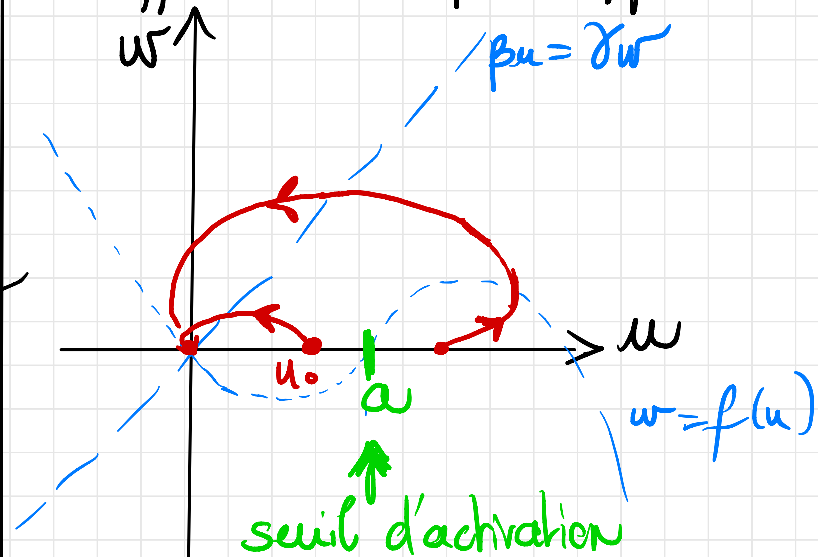
$\begin{cases} u(t,x) : \text{potentiel électrique à } (t,x) \\ w(t,x) : 2^{\text{ème}} \text{ inconnue (sans sens physique)} \end{cases}$

Etape 2 : le cas homogène en espace

On s'intéresse pour commencer au cas homogène en espace : $u(t,x) = u(t)$ dans le cas d'une stimulation initiale le long de l'axone :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = \underbrace{u(1-u)(u-a)}_{f(u)} - w \\ \dfrac{dw(t)}{dt} = \varepsilon(\bar{\beta} u - \gamma w) \end{cases}}$$

* Avec des conditions initiales : $\begin{cases} u(0) = u_0 > 0 \\ w(0) = 0 \end{cases}$, on constate un effet de seuil par rapport à u_0 :



Etape 3 : résolution numérique du modèle de Hodgkin-Huxley

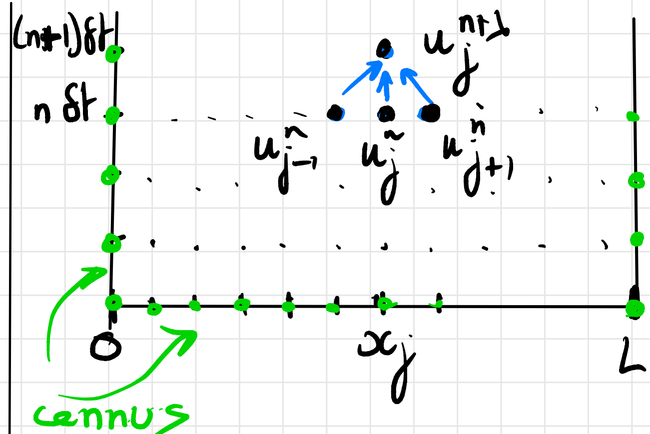
Pour résoudre le système :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(u) - w \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= \varepsilon(\beta u - \gamma w) \end{aligned}}$$

on discrétise le temps et l'espace :

$t_n = n\,\delta t$, $x_j = \frac{j}{N}\cdot L$, $(0 \le j \le N)$

* $\left.\begin{aligned} u(t_n,x_j) &\approx u_j^n \\ w(t_n,x_j) &\approx w_j^n \end{aligned}\right\}$ vérifient :



$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = D\,\dfrac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\delta x)^2} + f(u_j^n) - w_j^n \\ \dfrac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\delta t} = \varepsilon(\beta u_j^n - \gamma w_j^n) \end{cases}$$

avec :

impulsion

$u_0^n = \begin{cases} h_0 & \text{si } 0 \le t \le T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $w_0^n = 0$

$u_N^n = w_N^n = 0$

$u_j^0 = w_j^0 = 0$

Etape 4 : simulation avec Scilab

On fixe :

$L = 20$; $D = 0{,}01$; $a = 0{,}25$;

$\varepsilon = 0{,}01$; $\beta = 0{,}2$; $\gamma = 1$

et

$\delta x = 0{,}2$ $(N = 100)$, $\delta t = 0{,}1$

Deux impulsions électriques sont testées :

$$\begin{cases} h(t) = 3 \text{ si } 0 \leq t \leq 4 \\ h(t) = 4 \text{ si } 0 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

Pour aller plus loin :

→ absence d'ondes progressives par certaines valeurs de paramètres

→ détermination numérique et théorique de la vitesse de propagation

Références :

* Texte agrégation "ondes progressives dans un neurone"

* Qu'est ce que la modélisation ?
  www.imose.fr