Partiel 6 novembre 2006

9h00-12h00

Bât. Fermat, salle 2001

L'usage des calculatrices, des téléphones portables et de tout document est interdit

Exercice 1.

Soit E et F des espaces de Banach et soit $G \subset E$ un sous espace linéaire et $f : G \rightarrow F$ une application linéaire. On suppose que le graphe de f est fermé dans $E \times F$. Pour $u \in G$ on pose $\|u\|_f = \sup(\|u\|_E, \|f(u)\|_F)$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_f$ est une norme sur G .
- 2) Montrer que G est complet pour la norme $\|\cdot\|_f$.
- 3) Montrer que f est continu de $(G, \|\cdot\|_f) \rightarrow F$.

Exercice 2.

On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$ on note

$$Ku(x) = \int \frac{u(y)}{1 + x^2 + y^2} dy$$

- 1) Montrer que pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ on a $Ku \in E$.
- 2) Montrer que $K : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow E$ est continue et calculer $\|K\| = \|K\|_{\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), E)}$.
- 3) Montrer que $K(B_{L^1}(0, 1))$ est relativement compact dans E .

Exercice 3.

Soit E et F des espaces de Banach. Soit T_n des applications linéaires continues de $E \rightarrow F$. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)_n$ converge et on note $Tx = \lim T_n x$.

- 1) Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| \leq C$.
- 2) Montrer que si $x_n \rightarrow x$ dans E alors $T_n x_n \rightarrow Tx$ dans F .

Exercice 4.

Soit E , F et G des espaces de Banach. Soit pour $\alpha \in A$, $f_\alpha : E \rightarrow F$ des applications linéaires continues. On suppose que $\{x \in E, f_\alpha(x) = 0 \forall \alpha \in A\} = \{0\}$.

Soit $f : G \rightarrow E$ une application linéaire.

On suppose que $\forall \alpha \in A, f_\alpha \circ f : G \rightarrow F$ est continue.

Montrer, en appliquant le théorème du graphe fermé dont on rappellera l'énoncé, que f est continue.

Exercice 5.

Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E un espace vectoriel. On suppose que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont tous les deux des espaces de Banach. On suppose que si $\|x_n\|_1 \rightarrow 0$ alors $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$.

- 1) Montrer par l'absurde que $i : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ tel que $i(x) = x$ est continue.
- 2) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes équivalentes.