Master de mathématiques M1.
Analyse Fonctionnelle Appliquée 2.
Année 2007/2008.

Université Versailles-Saint Quentin

Partiel 12 novembre 2007
9h00-12h00
Bât. Fermat, salle 2001
L'usage des calculatrices, des téléphones portables et de tout document est interdit

Exercice 1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $f \in E'$, $f \neq 0$. Soit $H = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$.
On définit pour $x \in E$, $d(x,H) = \inf\limits_{y\in H} \|x - y\|$.

Le but de l'exercice est de prouver que $d(x,H) = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}$ $(*)$.

1) Montrer que $|f(x)| \leqslant \|f\|_{E'} d(x,H)$, $\forall x \in E$.

2) Soit $z \in E \setminus H$, montrer que $d(x,H) \leqslant \left|\frac{f(x)}{f(z)}\right| \|z\|$ (remarquer que $y = x - \dfrac{f(x)}{f(z)} z \in H$).
En déduire $(*)$.

Exercice 2.

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
Soit (x_n) une suite de $[0,1]$ telle que $x_n \to a$ et on suppose que $f_n(a) \to b$.

Montrer que $f_n(x_n) \to b$.

Exercice 3.

Soit $H = L^2([0,\pi/2], \mathbb{C})$, pour $f \in H$, on définit $(Tf)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\cos t dt$. On note $E = \mathcal{C}([0,\pi/2], \mathbb{C})$. On munit H de la norme $\|\cdot\|_2$ et E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1) Montrer que $\forall f \in H$ on a $Tf \in E$.

2) Montrer que T est un application linéaire continue de H dans E. Calculer $\|T\|_{\mathcal{L}(H,E)}$.

3) Montrer que T est un opérateur compact de H dans E.

Exercice 4.

Soit $\alpha \in]0,1[$ pour $u : [0,1] \to \mathbb{C}$, on note $\|u\|_\alpha = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u(x)| + \sup\limits_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

Soit $C^\alpha = \{u : [0,1] \to \mathbb{C},\ ,\|u\|_\alpha < +\infty\}$.

1) Montrer que si $u \in C^\alpha$ alors u est continue.

2) Montrer que C^α est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$.

3) Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy dans C^α alors elle est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$. Montrer que la limite u dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ est dans C^α. En déduire que u_n converge vers u dans C^α et que C^α est un espace de Banach.

4) Montrer que $B = \{u \in C^\alpha,\ \|u\|_\alpha \leqslant 1\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ puis que B est compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$.

Exercice 5.

Soit (x_n) une suite de $[0,1]$ et (y_k) une suite de $\mathbb{C}$. On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On note $A_{n,k} = \{f \in E,\ f(x_n) \neq y_k\}$.

1) Montrer que $A_{n,k}$ est un ouvert dense de E.

2) Montrer que $A = \{f \in E,\ \forall n,k\ f(x_n) \neq y_k\}$ est dense dans E (penser que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable).