# PARTIEL DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

## EPF, 2ème année, 5 Juin 2002

*(l'usage de la calculatrice EPF est autorisé)*

1. Soit à résoudre l'équation $\log(x) + x = 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

a) Par analyse graphique et sans calcul, montrer que cette équation possède une unique racine située dans $]0, 1[$.

b) Par la méthode de bissection, donner une approximation de cette racine avec 2 décimales significatives. Combien d'itérations sont-elles nécessaires?

c) Reprendre la question précédente avec la méthode de Newton et comparer les résultats obtenus.

2. Soit une fonction $f \in \mathbf{C}^\infty([-2, 2], \mathbf{R})$ passant par les points $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 0)$.

a) Calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$, noté $P$, passant par les 5 points précédents.

b) Calculer une valeur approchée de $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ de trois manières différentes:

(i) en utilisant la méthode des trapèzes

(ii) en utilisant la méthode de Simpson

Que dire de leurs précisions respectives dans le cas général?

3. On verse une masse $m_0$ de sucre dans un récipient contenant initialement une quantité d'eau pure pouvant dissoudre au maximum une masse $M$; la vitesse de dissolution (masse dissoute par unité de temps), à un instant donné, est proportionnelle à la différence entre $M$ et la masse déjà dissoute à cet instant, indépendament de la masse restante.

a) Tradure cette loi par une EDO sur la fonction $t \to m(t)$ (masse de sucre dissoute à l'instant $t$) et donner la forme de la solution faisant apparaitre une constante de temps $\tau$.

b) Suivant la valeur de $m_0$, quand la dissolution s'arrête t-elle?

c) Au bout de 10 minutes, il reste 40 pour cent de la masse initiale et au bout de 20 minutes, 10 pour cent. En déduire $\frac{m_0}{M}$, $\tau$ et le temps correspondant à la dissolution complète.

d) On suppose $\frac{m_0}{M} = \frac{(e-1)}{e}$ et $\tau = 1$. On cherche à approcher $m(\frac{i}{N})$ ($i \in \{0, ..., N\}$ et $N \in \mathbf{N}^*$) par la méthode d'Euler explicite sur $[0, 1]$. Exprimer la valeur $m_i$ ainsi construite et retrouver la convergence de la méthode d'Euler sur cet exemple.

4. Résoudre sur un intervalle de $\mathbf{R}$ (à préciser), l'EDO

$$x^3 y'(x) + y^2(x) + x^2 y(x) + 2x^4 = 0$$