PARTIEL EPF 2003, DEUXIEME ANNEE

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

1.(*12 points*) Soit $f \in C^2([a,b],\mathbf{R})$ vérifiant les quatre hypothèses suivantes:

(H1) $\exists m > 0, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \geq m$

(H2) $\exists M \geq 0, \quad \forall x \in [a,b], \quad |f''(x)| \leq M$

(H3) $f(a)f(b) < 0$

(H4) $\dfrac{M}{4m}(b-a) < 1$

a) Montrer qu'il existe un unique $\bar{x} \in]a,b[$ tel que $f(\bar{x}) = 0$

b) Montrer que l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est égale à

$$\rho = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

c) On admet que $\bar{x} \in [\rho - \dfrac{M}{8m}(b-a)^2, \rho + \dfrac{M}{8m}(b-a)^2] \cap [a,b]$ pour f vérifiant (H1) à (H4). Proposer une méthode d'approximation de $\bar{x}$ consistant à construire deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que:

(i) $a_0 = a$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croit vers $\bar{x}$

(ii) $b_0 = b$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroit vers $\bar{x}$

(iii) $b_n - a_n \leq \dfrac{4m}{M}\left(\dfrac{M}{4m}(b-a)\right)^{2^n}$

d) On considère la fonction f définie sur $[1,2]$ telle que $f(x) = 6\ln(x) - x$. Déterminer m et M tels que les hypothèses (H1) à (H4) soient vérifiées pour f.

e) Determiner une approximation à 10^{-4} près de l'unique solution $\alpha \in]1,2[$ de l'équation $6\ln(x) - x = 0$ à l'aide de la méthode construite en c). Indiquer les résultats de chaque itération.

f) Combien d'itérations sont nécessaires pour le calcul de α à une précision de 10^{-20} avec la même méthode? Comparer avec le nombre d'itérations ncessaires avec la méthode de la bissection.

2.(*8 points*)

a) Rechercher l'ensemble des solutions de l'EDO:

$$(1-x^2)y' - 2xy = 1$$

sur les trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-\infty,1[$ et $\mathbf{R}$.

b) Rechercher l'ensemble des solutions de l'EDO:

$$x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$$

sur $]0,+\infty[$.