PARTIEL MATHEMATIQUES APPLIQUEES

EPF, 2eme ANNEE, 2004

(calculatrice EPF autorisée)

1.(*6 points*)

a) Montrer que l'équation $x\ln(x) = 10$ admet une unique solution $\bar{x} > 0$. Montrer que $\bar{x} \in [5, 6]$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 6$ et

$$x_{n+1} = \frac{10}{\ln(x_n)}$$

est correctement définie et vérifie

$$|x_n - \bar{x}| \leq (\frac{2}{\ln(5)^2})^n$$

En déduire que cette suite converge vers $\bar{x}$.

c) En utilisant la question précédente, écrire un algorithme (sous forme pseudo-informatique) permettant d'approcher $\bar{x}$ avec une précision ϵ donnée.

2.(*6 points*)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbf{R})$. On note $RG_n(f)$, $RD_n(f)$ et $TR_n(f)$, l'approximation de $\displaystyle\int_0^T f(x)dx$ par les méthodes respectives des rectangles à gauche, à droite et des trapèzes sur $n+1$ points équirépartis.

a) Montrer que $RG_n(f) = RD_n(f) = TR_n(f)$ si $f(0) = f(T)$.

b) Déterminer pour quelles valeurs de n, TR_n permet d'obtenir une approximation de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos x + 2)}dx$ à une précision de 10^{-8}. On rappelle que si $f \in \mathcal{C}^2([0,T], \mathbf{R})$,

$$|\int_0^T f(x)dx - TR_n(f)| \leq \frac{T^3}{12n^2}||f^{''}||_\infty$$

3.(*8 points*) On considère l'équation différentielle suivante:

$$(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + (1-x^2)y(x) = 0 \quad (E)$$

a) Vérifier que $u(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ est solution de (E)

b) Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$ effectuant le changement de fonction inconnue $y = uz$ et déterminer l'unique solution Y de (E) telle que $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = 1$.

c) Donner une approximation de $Y(\dfrac{1}{10})$ et de $Y'(\dfrac{1}{10})$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec un pas $\Delta T = \dfrac{1}{10}$. Comment peut-on améliorer cette approximation?