Projet individuel Scilab
Méthodes de tir pour des problèmes avec données aux bords

On s'intéresse à des problèmes d'équations différentielles avec données aux bords. L'exemple le plus simple est l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} u'' = f \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une application donnée, continue de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons appliquer à cette équation la méthode suivante, dite méthode de tir : elle consiste à résoudre le système

$$\begin{cases} u'' = f \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ u(0) = 0,\, u'(0) = a. \end{cases} \tag{2}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette équation admet une unique solution pour tout $a \in \mathbb{R}$, et le système (2) permet donc de définir une application

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & a & \longmapsto & \Phi(a) = u(1). \end{array}$$

Il s'agit ensuite de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(a) = 0$.

1 Le cas de l'équation de Laplace

1.1 Étude théorique

1. Démontrer que l'unique solution de (2) vaut
$$u(x) = ax + \int_0^x (x-t)f(t)dt.$$
En déduire une expression de Φ, puis de Φ'.
2. En déduire que la fonction Φ définie (2) est strictement croissante. En déduire qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(a) = 0$.
3. En déduire que le problème (1) admet une unique solution.

1.2 Étude numérique

On suppose ici que $f = 1$.

1. Écrire une fonction *Scilab* appelée `Phi` qui calcule une solution approchée de (2) par la méthode d'Euler explicite. Les arguments d'entrée sont a, la fonction f et n, le nombre de points de discrétisation.
2. Écrire une fonction *Scilab* appelée `dichotomie` qui applique la méthode de dichotomie à la fonction Φ.
3. Utiliser les deux fonctions précédentes pour calculer une solution approchée de (1). Tracer sur un même graphe la solution exacte (que l'on calculera au préalable) et la solution approchée calculée pour diverses valeurs de n.
4. Reprendre les questions 2 et 3 en utilisant la méthode de Newton plutôt que la méthode de dichotomie.

2 Équation de la chaînette

On s'intéresse maintenant au système

$$\begin{cases} u" - \sqrt{1+u'^2} = 0, \quad \text{dans} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Cette équation modélise la configuration d'un fil soumis à la pesanteur et tenue aux deux extrémités.

1. Démontrer que la solution exacte de (3) s'écrit $u(x) = A + \cosh(x - B)$, où A et B sont des constantes que l'on calculera.
2. Reprendre les questions 1, 2 et 3 de l'étude numérique ci-dessus pour le système (3).
3. Reprendre l'étude numérique en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 au lieu de la méthode d'Euler.