**ROYAUME DU MAROC**

**MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE**

# RAPPORT D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

# SESSION 2018

**AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE - SESSION 2018**

# COMPOSITION DU JURY

| | |
|---|---|
| OUKNINE Youssef | Président du jury –Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad |
| DIYER Okacha | Vice Président - Professeur agrégé de mathématiques, chargé d'inspection en CPGE ;<br>CNIPE – Rabat |
| OUASSOU Idir | Vice Président - Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Ecole Nationale des Sciences Appliquées ; Université Cadi Ayyad |
| AZIZI Abdelmalek | Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences ; Université Mohamed Premier |
| BERRAHO Mohammed | Professeur agrégé de mathématiques, chargé d'inspection en CPGE ;<br>CNIPE –Rabat |
| CHAIRA Abdellatif | Professeur de l'enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Université My Ismail Meknes |
| EL KAHOUI M'hammed | Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad |
| ERRAOUI Mohamed | Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad |
| GONNORD Stephane | Professeur agrégé de mathématiques,<br>Classes préparatoires, Lyon-France |
| HAJMI Said | Professeur agrégé de mathématiques,<br>Classes préparatoires , Agadir |
| MAAROUF Hamid | Professeur Assistant,<br>Faculté Polydisciplinaire de Safi ; Université Cadi Ayyad |
| NASROALLAH Abdelaziz | Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad |
| SADIK Brahim | Professeur de l'Enseignement Supérieur,<br>Faculté des Sciences Semlalia ; Université Cadi Ayyad |
| TAIBI Mimoun | Professeur agrégé,<br>Classes préparatoires My Youssef ; Rabat |

# AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE
# SESSION 2018

Rapport du jury présenté par :
*Professeur Ouknine Youssef : Président du jury*
*Université Cadi Ayyad*
*Faculté des Sciences Semlalia*
e–mail: ouknine@uca.ma

# Table des Matières

# Chapitre 1

# Composition du jury

## 1.1 Directoire

| | | |
|---|---|---|
| Ouknine Youssef | Professeur de l'Enseignement Supérieur | Marrakech |
| Ouassou Idir | Professeur de l'Enseignement Supérieur | Marrakech |
| Oukacha Diyer | Professeur agrégé de mathématiques | Rabat |

## 1.2 Jury

### 1.2.1 Analyse et Probabilités

1. Berrahou Mohamed
2. Chaira Abdellatif
3. Erraoui Mohamed
4. Taibi Mimoune

### 1.2.2 Algèbre et Géométrie

1. Azizi Abdelmalek
2. Hajmi Said
3. Sadik Brahim

### 1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

1. Elkahoui M'hammed
2. Gonnord Stephane
3. Maarouf Hamid
4. Nasroallah Abdelaziz

# Chapitre 2

# Introduction

La session 2018 du concours d'agrégation de mathématiques a été caractérisée par l'enrichissement de certains comités du jury par de nouveaux membres, notamment le comité d'Analyse et Probabilités et le comité de Modélisation et Calcul Scientifique. Suite aux précédentes sessions, elle est ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume et aux candidats libres titulaires d'un Master da mathématiques ou équivalent. Elle entre aussi dans le cadre de la réforme de l'épreuve de Modélisation et Calcul Scientifique depuis l'année 2015. Ainsi l'année 2018 est considérée comme la quatrième année de transition pendant laquelle nous avons fait cohabiter textes et leçons : Contrairement à leurs prédécesseurs, les candidats qui ont subi les épreuves orales du concours ont été confrontés à une nouvelle épreuve de modélisation qui comprenait deux éléments, à savoir le choix d'une leçon, dans la pure tradition du concours ou le choix d'un texte.

Au terme de la préparation, les candidats subissent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves de l'écrit. Les épreuves sont ensuite envoyées en France pour correction. L'opération de déchiffrage des résultats se fait en France en présence du président du jury marocain. Une réunion du jury marocain est tenue à Rabat pour la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant le jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

La session 2018 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine s'est caractérisée par l'augmentation du nombre de postes offerts par rapport à la session précédente : 30 postes (contre 20 en 2017). De même, une très nette augmentation du nombre des inscrits au concours en 2018 par rapport à 2017 est enregistrée :

- le nombre de candidats inscrits était de 170 (contre 117 en 2017), ce qui correspond à une augmentation d'environ 68,8 %
- le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves écrites d'agrégation était de 107,
- 70 candidats ont été déclarés admissibles (contre 43 en 2017) et leur moyenne était de 7,23/20 (contre 7,70/20 en 2017), le dernier admissible ayant 5/20 (contre 5,09/20 en 2017).
- 20 candidats (contre 15 en 2017) ont été déclarés admis et leur moyenne était de 10,68/20 (11,98/20 en 2017).

Le jury souligne qu'il y avait des candidats ingénieurs d'état parmi les candidats officiels des sessions 2016, 2017 et 2018. De même cette année il y a des candidats de la première année de la formation C.R.M.E.F.

Ce rapport du jury se veut formatif, son objectif est d'aider les candidats à préparer les examens de la session 2019. Nous espérons que les conseils apportés dans ce rapport permettront aux futurs candidats de se préparer comme il se doit à cette épreuve.

En ce qui concerne le déroulement du concours, je tiens à remercier vivement, pour le soutien moral et matériel :

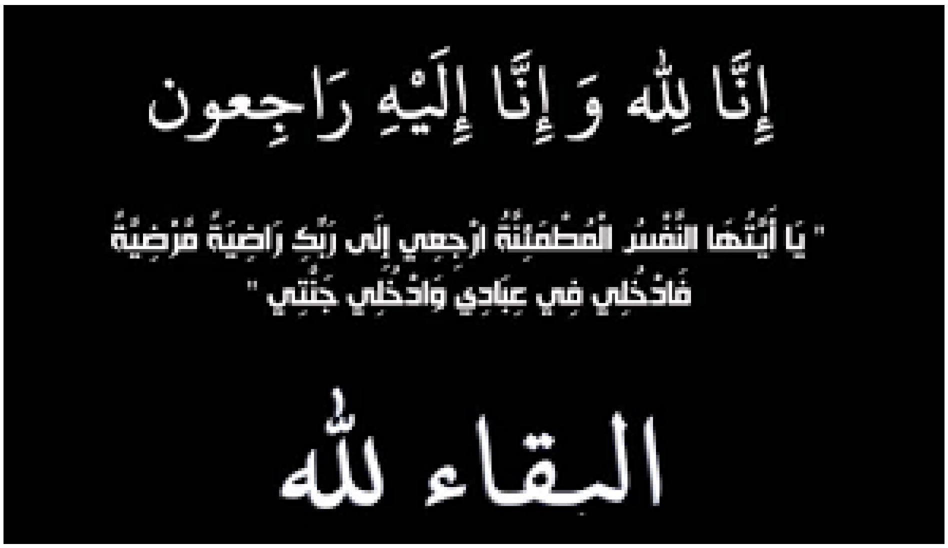
1. L'ensemble de mes collègues membres du jury.
2. Le Centre National des Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation.
3. L'Unité Centrale de la Formation des Cadres.

4. La direction du C.R.M.E.F de Rabat.

Ces équipes n'ont épargné aucun effort pour la réussite et le bon déroulement de ce concours.

**Un mot de condoléances :**

Le jury est profondément peiné par la disparition de notre collègue Daniel Roux qui a donné avec un grand sacrifice et une grande énergie à l'agrégation marocaine de mathématiques. Les mots ne sont d'aucun secours pour exprimer la douleur que tous les membres du jury ressentent. Le jury présente ses sincères condoléances à sa petite famille et à ceux qui ont eu le privilège de le connaître.



# Chapitre 3

# Déroulement du concours et statistiques

## 3.1 Déroulement de la session 2018

### Déroulement des épreuves écrites

Les épreuves écrites de l'agrégation externe de mathématiques 2018 se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- le jeudi 22 mars 2018 pour l'épreuve de mathématiques générales (voir l'Annexe),
- le vendredi 23 mars 2018 pour l'épreuve d'analyse et probabilités (voir l'Annexe),

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français, marocains et tunisiens) ont eu lieu le mercredi 16 mai 2018 de 10h à 17 h à Telecom ParisTech., 46 rue Barrault 75013 Paris sous la présidence du président du jury de l'agrégation externe de mathématiques française et des deux présidents de l'agrégation marociane et tunisienne. la liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 18 mai 2018.
Rappelons que Le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient le Maroc, la France et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en France et en Tunisie ; les barres d'admissibilité pour les étudiants du Maroc et la Tunisie est au moins égale à celle de la barre fixée par le jury français.

Les candidats admissibles ont reçu une convocation, indiquant les huit jours de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Toutefois, pour connaître les horaires précis d'interrogation, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires étaient, par défaut, invités à se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure sera reconduite l'an prochain.

Le concours de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique) ou dans l'enseignement supérieur (grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau bac +3 ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

### Déroulement des épreuves orales

Les épeuves d'admission se sont déroulées du mardi 20 juin au samedi 30 juin 2018. La liste d'admission a été publiée le dimanche 1 juillet 2018. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Analyse et probabilités ;

- Algèbre et géométrie ;
- Modélisation et calcul scientifique

**Lundi 19 juin 2018 à partir de 09h30mn au CRMEF, Rabat**

- Réunion d'accueil présidée par M. OUKNINE, président du jury ;
- Préparation des couplages et mise sous enveloppes ;
- Elaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
- Validation, par les candidats, du planning anonyme de passage par épreuve ;
- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats vers 15h;
- Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 16h ;
- Inspection, par les membres du jury, de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôle des ouvrages apportés par les candidats à partir de 17h.

**Remarque 3.1.1**

- *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration la veille du commencement du concours, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*
- *la saisie des notes se fait au fur et à mesure du déroulement des épreuves.*

**Du Mardi 20 juin au Samedi 30 juin 2018 : Déroulement des épreuves orales ;**

**Dimanche 01 juillet 2018 de 09 h à 12 h : délibérations et proclamation des résultats.**

## 3.2 Résultats généraux

| | |
|---|---|
| Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites | 170 |
| Postes mis au concours | 30 |
| Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites | 107 |
| Candidats eliminés | 0 |
| Candidats admissibles | 70 |
| Candidats admis | 20 |

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2017

**Classes préparatoires :**

Candidats admis et proposés par le jury pour effectuer un stage probatoire en CPGE

# Résultat du concours national
# de l'agrégation de mathématiques
# Session 2018

## Liste des admis par ordre de mérite

| Ordre | Nom | Prénoms | Décision du jury |
|---|---|---|---|
| 1 | DWIMI | OMAR | Admis |
| 2 | ED-DARRAZ | ABDELKARIM | Admis |
| 3 | AREHILA | AZZEDDIN | Admis |
| 4 | KERMISS | BRAHIM | Admis |
| 5 | AINABI | TARIQ | Admis |
| 6 | BOUISHAK | ISMAIL | Admis |
| 7 | EL IBRAQUI | RACHID | Admis |
| 8 | ZGAITI | MOURAD | Admis |
| 9 | OULAFOU | YASSIN | Admis |
| 10 | SOUKHAL | ABDERRAHIM | Admis |
| 11 | AHENDOUZ | YOUSSEF | Admis |
| 12 | SABIR | ABDELILAH | Admis |
| 13 | SELLOUM | ZITOUNI | Admis |
| 14 | DAHNI | ABDELKARIM | Admis |
| 15 | SALHI | ABDELMAJID | Admis |
| 16 | SAIDI | ABDELFETTEH | Admis |
| 17 | DAANOUNE | ELHACHEM | Admis |
| 18 | EL GMAIRI | ABDERRAHMAN | Admis |
| 19 | LAGUCHORI | TARIK | Admis |
| 20 | BIR-JMEL | AHMED | Admis |

**Nombre total de candidats déclarés admis : Vingt ( 20)**

# Chapitre 4

# Sommaires sur les notes obtenues

## 4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AP : Analyse et Probabilités
- MG : Mathématiques générales

### 4.1.1 Répartition des condidats admissibles selon le sexe

Parmi les admissibles on trouve :

| Sexe | Nombre | Pourcentage |
|---|---|---|
| Femme | 1 | 1,428 % |
| Hommes | 69 | 98,572% |

Répartition des admissibles selon le sexe

### 4.1.2 Répartition des condidats admissibles selon l'âge

Les caractéristiques descriptives de la variable âge sont résumées dans le tableau suivant :

| Nombre | Minimum | Maximum | Moyenne | Ecart type |
|---|---|---|---|---|
| 70 | 23 | 56 | 36,82 | 9,43 |

Les caractéristiques descriptives de la variable âge

La répartition des admissibles selon l'âge est présentée dans le tableau suivant :

| Age | Effectif | Pourcentage |
|---|---|---|
| 23 | 1 | 1,42% |
| 24 | 2 | 2,85% |
| 25 | 3 | 4,28% |
| 26 | 2 | 2,85% |
| 27 | 2 | 2,85% |
| 28 | 6 | 8,57% |
| 29 | 6 | 8,57% |
| 30 | 7 | 10% |
| 31 | 3 | 4,28% |
| 33 | 1 | 1,42% |
| 34 | 3 | 4,28% |
| 36 | 4 | 5,71% |
| 38 | 5 | 7,14% |
| 39 | 1 | 1,42% |
| 40 | 3 | 4,28% |
| 41 | 3 | 4,28% |
| 42 | 2 | 2,85% |
| 43 | 1 | 1,42% |
| 44 | 3 | 4,28 % |
| 45 | 2 | 2,85% |
| 46 | 3 | 4,28% |
| 49 | 1 | 1,42% |
| 51 | 1 | 1,42% |
| 55 | 1 | 1,42% |
| 56 | 1 | 1,42% |

Répartition des admissibles selon leur âge

### 4.1.3 Répartition des notes des épreuves écrites

Le jury de l'agrégation française de mathématiques avait fixé pour tous les candidats la barre d'admissibilité à 40/160. On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite.

| Epreuve | Minimum | Maximum | Moyenne | Ecart-type | la médiane | le mode |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mathématiques générales (note sur 20) | 3,25 | 11,5 | 6,8 | 1,67 | 6,75 | 6,75 |
| Analyse et probabilités (note sur 20) | 4,25 | 15 | 7,64 | 1,93 | 7,38 | 6 |
| Total écrit (note sur 40) | 10 | 22,5 | 14,44 | 2,86 | 14,125 | 13,75 |

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

## 4.2 Répartition des notes des épreuves orales

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilités
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale.

| Epreuve | Minimum | Maximum | Moyenne | Ecart-type | la médiane | le mode |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Algèbre et géométrie (notes sur 80) | 16 | 68 | 44,49 | 14,72 | 44 | 44 |
| Analyse et probabilités (notes sur 80) | 16 | 56 | 35,16 | 10,07 | 36 | 26 |
| Modélisation et calcul scientifique (/80) | 12 | 74 | 34,73 | 14,46 | 32 | 28 |
| Total oral (note sur 240) | 56 | 190 | 112,5 | 30,32 | 106 | 101 |

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

### 4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison de l'année, 2014 à l'année 2018

Effectifs détaillés des condidats aux épreuves écrites de 2014 et 2018

| Année | 2014 | | 2015 | | 2016 | | 2017 | | 2018 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Epreuve | MG | AP | MG | AP | MG | AP | MG | AP | MG | AP |
| Inscrits | 61 | 61 | 99 | 99 | 60 | 60 | 117 | 117 | 170 | 170 |
| Présents | 32 | 32 | 53 | 53 | 47 | 47 | 65 | 65 | 107 | 107 |
| Absents | 29 | 29 | 46 | 46 | 13 | 13 | 52 | 52 | 63 | 63 |
| Note moyenne sur 20 | 8,48 | 5,93 | 7,37 | 7,73 | 9,82 | 8,79 | 5,47 | 6,50 | 6,8 | 7,64 |

**La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :**

| Année | 2014 | | 2015 | | 2016 | | 2017 | | 2018 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'admis | 14 | | 16 | | 25 | | 43 | | 70 | |
| Epreuve | MG | AP | MG | AP | MG | AP | MG | AP | MG | AP |
| Moyenne sur 20 | 8,48 | 5,93 | 7,37 | 7,73 | 9,82 | 8,79 | 7,28 | 8,14 | 6,8 | 7,64 |

**La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :**

| Année | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| Admissibles | 14 | 16 | 25 | 43 | 70 |
| Moyenne des épreuves sur 20 | 7,20 | 7,55 | 8,30 | 7,71 | 7,22 |

### 4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison de l'année 2014 à l'année 2018

**La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :**

| Année | 2015 | | | 2016 | | | 2017 | | | 2018 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Epreuve | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS |
| Présents | 15 | 15 | 15 | 25 | 25 | 25 | 43 | 43 | 43 | 63 | 63 | 63 |
| Moyenne | 48,26 | 39,4 | 35,8 | 47,44 | 44,4 | 31,4 | 40,87 | 34,10 | 31,4 | 44,49 | 35,16 | 34,73 |

**La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:**

| Année | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| Admissibles | 14 | 16 | 25 | 38 | 63 |
| Moyenne des épreuves sur 80 | 37,62 | 41,15 | 41,08 | 35,45 | 38,126 |

**La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admis est comme suit :**

| Année | 2015 | | | 2016 | | | 2017 | | | 2018 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'admis | 09 | | | 17 | | | 15 | | | 20 | | |
| Epreuve | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS | AG | AP | MCS |
| Moyenne sur 80 | 54,3 | 39,4 | 35,8 | 53,12 | 51,65 | 37 | 53,07 | 49,27 | 40,07 | 56,2 | 42,8 | 49,3 |

**La moyenne générale des candidats admis est comme suit :**

| Année | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 |
|---|---|---|---|---|---|
| Admis | 07 | 09 | 17 | 15 | 20 |
| Moyenne des épreuves sur 80 | 45,09 | 46,81 | 44,29 | 47,47 | 42,72 |

## 4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

| Année | Nombre de Candidats Marocains | Nombre de Candidats Admissibles | Nombre de Candidats Admis |
|---|---|---|---|
| 1988 | 8 | 7 | 3 |
| 1989 | 17 | 17 | 10 |
| 1990 | 29 | 23 | 16 |
| 1991 | 28 | 27 | 21 |
| 1992 | 27 | 27 | 24 |
| 1993 | 24 | 22 | 19 |
| 1994 | 24 | 22 | 19 |
| 1995 | 32 | 24 | 20 |
| 1996 | 36 | 22 | 20 |
| 1997 | 22 | 15 | 15 |
| 1998 | 28 | 11 | 11 |
| 1999 | 34 | 20 | 18 |
| 2000 | 37 | 14 | 13 |
| 2001 | 44 | 21 | 16 |
| 2002 | 38 | 22 | 16 |
| 2003 | 37 | 28 | 18 |
| 2004 | 34 | 28 | 14 |
| 2005 | 25 | 20 | 11 |
| 2006 | 38 | 15 | 08 |
| 2007 | 55 | 11 | 08 |
| 2008 | 64 | 25 | 16 |
| 2009 | 39 | 17 | 13 |
| 2010 | 28 | 03 | 02 |
| 2011 | 35 | 13 | 04 |
| 2012 | 77 | 15 | 06 |
| 2013 | 63 | 20 | 11 |
| 2014 | 61 | 14 | 07 |
| 2015 | 93 | 16 | 09 |
| 2016 | 47 | 25 | 17 |
| 2017 | 63 | 43 | 15 |
| 2018 | 107 | 70 | 20 |

# Chapitre 5

# Déroulement des épreuves orales

Le rapport qui suit, précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats ; ainsi que les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l' aise aux épreuves orales.

## 5.1 Modalités pratiques

### 5.1.1 Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à tout autre objet électronique.
Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et
- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages $A4$ au maximum et possèdent une marge de $1cm$ sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation.
L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

#### Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (6 minutes maximum) pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré : il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

**Deuxième partie : le développement**

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements en égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Il faut veiller à rester au niveau de l'Agrégation. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement.

**Troisième partie : questions et dialogue**

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan presenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. Il est essentiel que le candidat maîtrise ce qu'il propose. Il doit s'attendre à ce que le jury lui pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon. Le but est de voir le candidat dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique : faire une analyse de l'exercice, établir des liens avec les résultats connus (qui peuvent être ceux du plan), proposer des calculs et raisonnements pouvant conduire à la solution de la question posée. La qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

### 5.1.2 Oral 2 : d'analyse et probabilités :

Les modalités pratiques sont les mêmes que celles de l'oral d'Algèbre et Géométrie.
Les probabilités et les statistiques sont utilisées ensemble dans de nombreuses applications où l'imprévu et le hasard dominent. Les probabilités sont très utiles dans les mécanismes décisionnels en univers incertain. Avec l'informatique, des simulations aléatoires peuvent être réalisées afin d'aider à la prise de décision dans de nombreux cas, comme l'évaluation des risques financiers (risques sur les marchés pour les banques), à fixer les prix de produits financiers et des primes de contrats d'assurance, compte tenu des nombreux risques ayant pour origine le marché ou le client (secteur d'assurances), les mesures d'audience des médias par des instituts de sondage, les prévisions d'appel sur téléphone portable pour optimiser le déploiement du réseau et les études de sureté de fonctionnement.
Aussi depuis les années 1980, les banques ont fait recours aux mathématiciens et la tendance de recrutement est plus récente au niveau des assurances. Les compétences exigées couvrent les mathématiques appliquées aux finances et à l'assurance (statistique, probabilités et actuariat). Le marché dans ce secteur est très prometeur.
Tenant compte de ces tendances observées sur le marché de l'emploi, la plupart des grandes écoles d'ingénieurs, ont creé des filières d'ingénierie financière pour former des compétences nécessaires afin de comprendre et maitriser la complexité des marchés financiers.

### 5.1.3 Oral 3 : modélisation et calcul scientifique :

Le candidat choisit entre un texte et une leçon. Il dispose de 4 heures de préparation, pendant lesquelles il dispose des ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation. Le candidat peut disposer de ses propres livres sous les deux conditions citées dans le paragraphe 5.1.1.

Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve.
Les textes sont surmontés du bandeau suivant:

- Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

  Les textes se terminent par le bandeau suivant :

- Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.

L'interrogation dure 1 heure et quart, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.
Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions. Le candidat dispose pendant sa préparation et l'interrogation d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Scilab et Python. Les supports informatiques (USB, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique comme par exemple des clés usb personnelles. Une imprimante sera mise à disposition des candidats dans la salle de préparation.
Dans cette épreuve, le candidat est appelé à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème concret en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer le plan qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.
La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâttie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.
La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant.

## 5.2 Remarques des commissions des épreuves orales

### 5.2.1 Remarques de la commission d'Algèbre et Géométrie

L'épreuve d'orale d'algèbre et géométrie s'est déroulée dans de bonne conditions, en respectant le plan dressé :

1. Environ 10 minutes pour la présentation du plan de la leçon
2. 20 minutes pour le développement
3. 30 minutes pour les discussions avec les membres de la commission

La commission a conclu quelques remarques à propos du déroulement de l'épreuve orale :

1. Le jury a remarqué une amélioration du niveau des présentations des candidats. De nouveaux théorèmes importants ont été développés.
2. Le jury souligne que dans la plupart du temps les candidats proposent un seul développement et s'il en proposent plus qu'un , alors soit qu'il manque de consistance ou soit qu'il fait l'objet dun développement qui ne touche pas au fond de la leçon.
3. Le jury met l'accent sur quelques habitudes anciennes qui persistent encore :
   (a) Des candidats ont dévoloppé leurs exposés tout en s'éloignant du thème principal des leçons accordées.

(b) Un bon nombre de candidats préfèrent les sujets d'algèbre linéaire et évitent les leçons de géométrie. Quand un candidat choisit des leçons d'algèbre linéaire ou portant sur les structures , il manque d'aspects et d'applications géométriques.

### 5.2.2 Remarques de la commission de Modélisation et Calcul Scientifique

1. Le jury a noté une amélioration en ce qui concerne la présentation des candidats. Il n'est par exemple pas rare qu'un candidat suggère plusieurs développements dans sa présentation.

2. Le Jury a noté que les candidats ont une nette tendance à préférer le texte à la leçon.

3. Le jury a remarqué qu'une partie non négligeable des candidats est incapable d'écrire le moindre programme informatique. Il recommande donc qu'un effort soit fait dans ce sens.

4. Le jury a aussi noté que, malheureusement, certains candidats continuent à faire des présentations totalement hors sujet. Il recommande donc que les candidats soient sensibilisés au fait que la pire des présentations qu'on puisse faire est la présentation hors sujet.

### 5.2.3 Remarques de la commission d'Analyse et Probabilités

En comparaison avec les sessions précédentes, le jury asouligne qu'un effort remarquable a été fait au niveau des présentations et des développements. Toutefois, le jury a soulevé les remarques suivantes :

1. Des candidats ont simplement recopié des plans disponibles, et se contentent d'une présentation linéaire, sans expliquer ou mettre en valeur le contenu du plan. La présentation se réduit à une récitation mécanique de ce qui est écrit sur le document.

2. Des candidats ont présenté un développement non maitrisé, visiblement mal compris. D'autres ont fait des choix de développement du niveau d'une classe de Terminale. Il est désavantageux, de chercher à remplir à tout prix les trois feuilles autorisées, avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas ou d'un niveau inférieur à celui de l'agrégation.

3. L'objectif de l'entretien avec le jury est de permettre une évaluation du recul et du niveau du candidat. Le jury attend des candidats qu'ils sachent écrire correctement une définition ou un théorème au tableau. Malheureusement, des problèmes de logique sont bien présents. Des questions élémentaires ont mis en difficulté de nombreux candidats.

4. Le jury a constaté un manque visible de la maîtrise des notions de la théorie de mesure et intégration ainsi que celle de probabilités. Le jury incite à porter un effort tout particulier pour combler ce manque.

# Chapitre 6

# Listes des leçons d'Algèbre-Géométrie et d'Analyse-Probabilités

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation des leçons figurant sur les listes. Une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2017, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

## 6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Sous-groupes distingués et de groupes quotients. Exemples et applications.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal.
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de fourier discrète. Applications.
11. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.
15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes.
18. Droite projective et birapport.
19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
21. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
22. Résultant. Applications.
23. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
24. Actions de groupes sur les espaces de matrices. Exemples et applications.
25. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
26. Déterminant. Exemples et applications.
27. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
28. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
29. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
30. Exponentielle de matrices. Applications.
31. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
32. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
33. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
34. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
35. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
36. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
37. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
38. Coniques. Applications.
39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
41. Utilisation des groupes en géométrie.
42. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
43. Etude métrique des courbes planes ou gauches.
44. Groupes abéliens finis.
45. Sous-groupes finis de $O^+(2)$ et $O^+(3)$.
46. Matrices équivalentes et semblables.
47. Résolution d'un système d'équations linéaires. Algorithmes et complexité.
48. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
49. Groupes quotients finis et théorèmes disomorphismes.
50. Espaces vectoriels quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.

## 6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.
7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonometriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications
13. Étude métrique des courbes. Exemples.
14. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . Exemples
15. Applications des formules de TAYLOR.
16. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
17. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
18. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
19. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
20. Convergence des suites numériques. Exemples et applications des suites numériques.
21. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
22. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
23. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
24. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
25. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
26. Fonctions à variations bornées et mésure de Stieljes, Exemples et applications.
27. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
28. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
29. Espaces $L^p$ ,$1 \leq p \leq +\infty$.
30. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
31. Illustrer, par des exemples, quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.

32. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
33. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
34. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
35. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
36. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
37. Séries de FOURIER. Exemples et applications.
38. Exemples de problèmes d'interversion de limites.
39. Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.
40. Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.
41. Vecteurs aléatoires et indépendance.
42. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
43. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.
44. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.
45. Fonctions de répartitions. Proriétés et applications.
46. Fonctions caractéristiques. Proriétés et applications.
47. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples
48. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence en loi, convergence en probabilité et convergence presque sûr).
49. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
50. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.
51. Utilisation de la notion de convexité en analyse.
52. Espaces de SCHWARTZS ($\mathbb{R}^d$) et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S^0(\mathbb{R}^d)$.
53. Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

# Chapitre 7

# Textes de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées
- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.
- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modèlisation mis en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris
2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié
3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon
4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)
5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.

- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

## 7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a,b] \times [c,d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$\left[a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n}\right] \times \left[c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p}\right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers $(i,j)$. Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0,255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple (RGB= red, green, blue).

### 7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice $M$ carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où $n_k$ est le nombre de pixels d'intensité $k$ (i.e. de termes de $M$ valant $k$). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des $(i,j)$ où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

### 7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image $M$. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec $M$ carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$. Comprimer une image $M$ consiste à la remplacer par une autre image $M'$ proche de $M$ - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle $A$ de taille $n, p$, il existe des matrices orthogonales $U, V_t$ et une matrice $D$ de taille $n, p$ telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec $U, V$ unitaires et $D$ respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les $k$ derniers sont 0 cela signifie que le rang de $A$ est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où $D'$ est obtenue en remplaçant dans $D$ les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de $M$. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si $M$ est d'ordre 512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4 \times 256^2 + 256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

### 7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

**Notations**

Soit $n$ et $p$ des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant $n$ lignes et $p$ colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.
On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, $I_n$ représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $0_n$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de $A$ : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} A$ désigne est le noyau de $A$, $\operatorname{Im} A$ l'image de $A$. Le noyau de $A$ est $\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$, noté $\operatorname{Ker} A$, l'image de $A$ est $\{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$, notée $\operatorname{Im} A$. On note $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace euclidien.

**Partie I**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
**I.1.** Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si $A$ est nulle.
Dans toute la suite du problème $A$ sera supposée non nulle.
**I.2.** Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
**I.1.a)** $X$, $Y$ désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.
**b)** Si $W$ est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre $\lambda$, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de $\lambda$ et $\| W \|_p$.
**c)** En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.
**I.4.a)** Pour $x$ réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

**b)** En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

**c)** En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.

**I.5.** Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.

**I.6.** On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i$ élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.

*Les réels $\mu_i$ sont appelés valeurs singulières de $A$.*

On suppose les réels $\lambda_i$ ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

**a)** Montrer que $\lambda_1$ est non nul.

On définit alors un unique entier naturel $r$ appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon $r$ est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.

Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque $r$ est strictement inférieur à $p$, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

**b)** Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$.

**c)** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si $r$ est strictement inférieur à $p$, pour tout $i \in \{\, r+1, \ldots, p \,\}$, $AV_i = 0$.

**d)** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

**e)** Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\, r+1, \ldots, n \,\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

**f)** En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur $U_i$.

**I.7.** On note $V$ la matrice carrée réelle d'ordre $p$ dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur $V_i$, $U$ la matrice carrée réelle d'ordre $n$ dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur $U_j$ et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

**a)** Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, p\},\ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**b)** On note $\Delta$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \ldots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$.

*La factorisation de $A$ ainsi obtenue est dite décomposition de $A$ en valeurs singulières.*

**c)** Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**I.8.** Montrer que le rang de $A$ est égal à $r$.

**I.9.a)** Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i{}^{\mathrm{t}}E_i$.

**b)** En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A{}^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^{\mathrm{t}}U_i$

**c)** Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}A$.

**d)** Montrer que $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$.

## Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$, on appelle $\Delta^+$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \ldots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \ldots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^{\mathrm{t}}U$.

*$\Delta^+$ (resp. $A^+$) est appelée pseudo-inverse de $\Delta$ (resp. de $A$). A priori, la matrice $A^+$ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice $A$, mais il sera montré à la question* **II.9** *qu'il n'en est rien et que $A^+$ est uniquement déterminée à partir de $A$.*

1. Déterminer les matrices $A_0^+$, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

4. Montrer que si $A$ est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

### 7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ... ) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :
En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdimage.jpg') fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

### 7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

**Aspect mathématique**

- Donner une preuve de l'unicité de $A^+$, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de $A$. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.

- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.

- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.

- Que donne la SVD de $A$ si $A$ est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

**Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique**

- Quel est l'intért de modèles numériques pour les images?
- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.
- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.
- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image $I$ en une image $I'$ pratiquement similaire à $I$ mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.
- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).
- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

## 7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont
- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point $M$ intérieur au solide la température en $M$ est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en $M$ (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit $G$ un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, $\partial G$ sa frontière et soit $\varphi$ une fonction continue de $\partial G$ dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue $f$ de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(a) $\forall x \in G, \quad \forall r \in ]0, dist(x, \partial G)[, \quad f(x) = \int_{|y| \leq r} f(x+y)dy$
(b) $\forall x \in \partial G, \quad f(x) = \varphi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP o intervient le laplacien de $f$, $\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

**Theorem 7.2.1** *Une fonction $f$ est solution du problème de Dirichlet sur $G$ avec condition au bord $h$ si et seulement si elle est de classe $C^2$ sur $G$, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine $G$ et sa frontière, l'existence ou l'unicité de $f$, solution du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array} \right.$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier o existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

**Theorem 7.2.2** *Le problème de Dirichlet sur la boule $B(0,r)$ avec condition au bord $\varphi$ est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz)$$

*o $m_r$ est la mesure uniforme sur la sphère $S(0,r) = \partial[B(0,r)]$ de masse $\mu_r$ choisie pour avoir $\displaystyle\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz) = 1$.*

La valeur de la solution en $x$ est une moyenne des valeurs de $h$ relativement à une probabilité dépendant de $x$ portée par la sphère $S(0,r)$. La fonction densité $z \mapsto \dfrac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d}$ est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine $G$ non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de $G$ est ici la loi de Cauchy translatée en $x$.

### 7.2.2 Méthodes numériques de résolution

**Déterministe**

On discrétise l'espace, notant $h > 0$ le pas de discrétisation, notant $\sim_h$ la relation de voisinage :

$$\forall (x,y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$ et $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \ \ \exists y \in G_h, \ x \sim_h y\}$.
Le laplacien discret est donné par $\Delta_h f(x) = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$.
Remarquer que $\Delta_h f(x) = 0$ équivaut à $f(x) =$ moyenne uniforme de $f$ sur le voisinage de $x$, ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.
Le problème de Dirichlet sur $G$ avec condition au bord $\varphi$ est remplacé par sa version discrète :
chercher $f_h$ définie sur $G_h \cup \partial_h G$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} (1) \forall x \in G_h, \quad \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, \ f(x) = \varphi_h(x) \end{array} \right.$
avec $\varphi_h(x) =$ valeur moyenne de $\varphi$ sur $\partial_h G \cap [x-h, x+h]^d$.
Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues, $n = card(G_h)$. On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice $n \times n$ du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.
La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque $h$ tend vers $0^+$.

**Stochastique**

On utilise ici le processus $W$, mouvement brownien $d-$ dimesionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur -1/2 près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur $G$ avec condition au bord $\varphi$ est donnée par

$$(3) \qquad f(x) = \mathbb{E}(\varphi(X(\tau_G)))$$

o $X(t) = x + W(t)$ et $\tau_G = \min\{t \geq 0, \quad X(t) \in \partial G\}$ (le temps d'atteinte de la frontière $\partial G$.
Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire $X_h$ partant de $x \in G_h$ (qui remplace le processus $X(t) = x + W(t)$ évoqué plus haut)

- on considère $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que

$$\forall(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) \in \{-1, +1\}^d, \quad \mathbb{P}(Y_j = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) = \frac{1}{2d}$$

- on pose, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $X_h(k) = x + \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.
La fonction $x \mapsto \mathbb{E}(\varphi(X_h(\tau_{G_h})))$ o $\tau_{G_h} = \min\{k \geq 0, \quad X(t) \in \partial G_h\}$ est une solution approchée du problème de Dirichlet sur $G$ avec condition au bord $\varphi$, elle converge vers la solution $f$ donnée par (3) lorsque $h$ tend vers $0^+$.
Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes $Y_j$ qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrte la marche aléatoire $X_h$ dès qu'elle atteint la frontière de $G$. Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

### 7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

**Rappels et notations**

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$.
- $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre $O$ de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre $O$ de rayon 1 et le cercle de centre $O$ et de rayon 1).
- On note $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application de classe $C^2$ sur louvert $\Omega$, on rappelle que le laplacien de $u$ est l' application $\Delta u = \partial_{1,1}u + \partial_{2,2}u$.
- Une application $v : \Omega \to R$ est dite harmonique (sur $\Omega$) si $v$ est de classe $C^2$ sur $\Omega$ avec $\Delta v(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.
- Pour $(x, y) \in D(0, 1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x + iy$ et on pose pour $t$ réel

$$N(x, y, t) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(x - \cos(t))^2 + (y - \sin(t))^2} \qquad \text{(quand l'expression a un sens)}$$

**Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$**

Soit $f : C(0, 1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0, 1)$, harmoniques sur $D(0, 1)$ et qui coïncident avec l'application $f$ sur $C(0, 1)$.
Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à $f$, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.
On définit en outre l'application

$$N_f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x, y, t)f(\cos(t), \sin(t))\, dt$$

sur $D(0, 1)$ et l'application $u(x, y) = \begin{cases} N_f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D(0, 1) \\ f(x, y) & \text{si } (x, y) \in C(0, 1) \end{cases}$ sur $\bar{D}(0, 1)$.

1. a. Montrer que $N_f$ admet une dérivée partielle $\partial_{1,1}N_f$ dordre 2 par rapport à $x$.
*De même on peut montrer que $N_f$ admet des dérivées partielles dordre 2 par rapport a toutes ses variables, continues sur $D(0, 1)$. Ce résultat est admis pour la suite.* Exprimer, pour tout $(x, y) \in D(0, 1)$, pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\partial_{i,j}N_f(x, y)$ en fonction de $\partial_{i,j}N(x, y, t)$.

b. En déduire que $u$ est harmonique sur $D(0,1)$.

2. On fixe $t_0 \in [0, 2\pi]$, $(x, y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$ :

$$I_0^\delta = \{t \in [0, 2\pi]/ \ \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

a. Montrer que $I_0^\delta$ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

b. Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x, y, t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

c. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0, 2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x, y, t)| \leq 4 \frac{1 - (x^2 + y^2)}{\delta^2}$$

d. En déduire que, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x, y) - (\cos(t_0), \sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x, y, t)(f(\cos(t), \sin(t)) - f(\cos(t_0), \sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que $u$ est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Conclusion?

4. (résumée) Montrer que si $f$ est nulle sur $C(0,1)$ alors $u$ est nulle sur $D(0,1)$. Conclusion?

### 7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

**Aspect mathématique**

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.
Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.
Pour l'utilisation de processus $X$ comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété $(f(X_t))_t$ est une martingale et la propriété $f$ harmonique.
La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine $G$. Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque srement. Comment prouver ces assertions?
Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut tre utilisé.

**Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique**

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas o le solide possède des sources de chaleur internes?
La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent tre efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?
Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.
Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.
Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

## 7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

### 7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des $n$ prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne $\lambda = 0.1$ mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que cette loi, notée $(d(k))_{k\in E}$, est donnée par $d(1) = d(4) = 1/6$ et $d(2) = d(3) = 1/3$. Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau $I$ de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande $Z$ articles, elle encourt un coût $C = K + iZ$, où $K = 32\$$ est le coût d'installation et $i = 3\$$ est le coût incrémental par article commandé (si $Z = 0$, aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.
L'entreprise adopte une stratérie, notée $(s, S)$, pour alimenter son stock et décide une commande $Z$ selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si} \quad I < s \\ 0 & \text{si} \quad I \geq s \end{cases}$$

où $(s, S) \in I\!\!N \times I\!\!N^*$ avec $s < S$.
Lorsqu'une demande $D$ est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock $I$ est supérieur ou égal à $D$ (i.e. $I \geq D$). Si la demande $D$ excède le niveau du stock $I$ (i.e. $I < D$), l'excès $\Delta = D - I$ est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où $\Delta > 0$, le niveau du stock $I$ devient théoriquement négatif ($I = -\Delta$). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.
Soit $I(t)$ le niveau du stock à l'instant $t$. Notons $I^+(t)$ et $I^-(t)$ les quantités $\max(I(t), 0)$ et $= \max(-I(t), 0)$ respectivement. Pour une période de $n$ mois ($n \in I\!\!N^*$), considérons les quantités $A^+(n)$ et $A^-(n)$ définies par

$$A^+(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^+(t)dt \qquad \text{et} \qquad A^-(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^-(t)dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté $m$ et un coût de l'arriérée noté $a$. Le coût $m = 1\$$, par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent, $a = 5\$$ par article manquant par mois.

### 7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que $I(0) = 60$.
On simule le comportement du stock pour $n = 120$ mois et on compare le coût total moyen par mois $CTM$ (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table (**Table 1.**) suivante:

| $s$ | 20 | 20 | 20 | 20 | 40 | 40 | 40 | 60 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | 40 | 60 | 80 | 100 | 60 | 80 | 100 | 80 | 100 |

**Table 1.** Différentes stratégies $(s, S)$

### 7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

**Définition**

*La densité de probabilité $f$ d'une variable aléatoire réelle $X$ qui obéit à une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notation: $X \sim Exp(\alpha)$) est définie par*

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où la notation $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $A$.
La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

**Théorème**

*Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F$ continue. La variable aléatoire réelle $Y$ définie par $Y = F(X)$ obéit à une loi de probabilité uniforme sur* $]0,1[$.

**Inverse généralisé de $F$**

Soit $X$ une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F$. La fonction inverse généralisée $F^-$ de $F$ est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F(x) \geq u\}, \quad u \in ]0,1[$$

**Remarque**

Si $F$ est inversible, alors $F^- = F^{-1}$.

**Exemples**

1)$-$ Pour une variable aléatoire exponentielle $X \sim Exp(\alpha)$, nous avons

$$F^-(u) = F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-u)}{\alpha}, \qquad u \in ]0,1[ \tag{7.3.2}$$

2)$-$ Pour une variable aléatoire réelle discrète $X$ à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, nous avons, pour une réalisation uniforme $u \in ]0,1[$,

$$(2) \begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors} & F^-(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^-(u) = x_k & \text{telle que} & \left( \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

### 7.3.4 Outils informatiques

La simulation Monte Carlo, d'un modèle aléatoire, utilise une suite $u_k$, $k = 1, 2, \cdots$, de réalisations de la loi uniforme sur $]0,1[$. On **admet** qu'une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d'une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l'appel de la fonction $rand()$ donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive $RAND\_MAX$, d'où la division $u = (float)rand()/RAND\_MAX$ donne un réel $u \in ]0,1[$ que l'on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$. Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

### 7.3.5 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

**Aspect mathématique**

1)− Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe
**"Quelques outils probabilistes"**.

2)− Déterminer le lien entre le paramètre $\lambda$ défini dans la section I et le paramètre $\alpha$ défini dans la section III.

3)− Soit $t > 0$. Exprimer $I^+(t)$ en fonction des instants $t_k \in [0, t]$ et des demandes $D_k$ formulées aux instants $t_k$.

4)− Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^+(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} A^-(n).$$

5)− Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l'importance du support de cette loi.

**Aspect enseignement**

1)− Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.

2)− Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?

3)− Discuter la possibilité de passer la commandea à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

**Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique**

1)− Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).

2)− Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.

3)− Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation $x$ de $X$ dont la fonction de répartition est $F$:

**Etape 1:** générer $u$ uniforme dans $]0, 1[$ (par un générateur de nombres aléatoires)
**Etape 2:** prendre $x = F^-(u)$

4)− Pour une stratégie $(s, S) = (30, 90)$, proposer une réalisation possible de $I(t)$, durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de $I(t)$, $I^+(t)$ et $I^-(t)$.

5)− Interpréter les quantités $mA^+(n)$ et $aA^-(n)$.

6)− Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.

7)− Justifier le fait qu'on peut remplaçer $ln(1 - u)$ par $ln(u)$ dans la formule (7.3.2).

8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé

pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données (**Table 1.**) en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison.
Vous présenter les résultats de l'execution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

# Chapitre 8

# Programme du concours de l'agrégation - Session 2018

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser et savoir illustrer. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés $K$ en général) sont supposés commutatifs.

## 8.1 Algèbre linéaire

### 8.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$, groupe linéaire $GL(E)$.

2. Sous-espacess tables d'unendomorphisme. Valeurs propres,vecteurs propres,sous-espaces propres.

3. Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

### 8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec $K^n$. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.
   Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.
   Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique. Poly- nômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley- Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

## 8.2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

## 8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Pro- duit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Décompo- sition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand $A$ est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau $Z$ et de l'algèbre $K[X]$ des polynômes sur le corps $K$. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $Q[X]$, critère d'Eisenstein.

5. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler. Théorème chinois.

6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Exten- sions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis. Morphisme de Frobenius.

7. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

## 8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadra- tiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments or- thogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symé- triques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition po- laire dans $GL(n,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2, classification des éléments de $O(2,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de $O(3,\mathbb{R})$; produit mixte, produit vectoriel.

5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décom- position polaire dans $GL(n,\mathbb{C})$.

## 8.5 Géométrie affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous- espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, en- veloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

2. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Dé- placements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

3. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocy- clicité.

4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

## 8.6 Analyse à une variable réelle

### 8.6.1 Nombres réels

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

### 8.6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

### 8.6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

1. Continuité
   Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la conti- nuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

2. Dérivabilité
   Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Etude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe $C^k$, de classe $C^k$ par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

### 8.6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonc- tions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

### 8.6.5 Intégration

1. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

2. Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi- convergentes.

### 8.6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

### 8.6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractéri- sations de la convexité. Inégalités de convexité.

## 8.7 Analyse à une variable complexe

### 8.7.1 Séries entières

1. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

2. Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

### 8.7.2 Fonctions d'une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin $C^1$ par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

2. Indice d'un chemin fermé $C^1$ par morceaux par rapport à un point.

3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

4. Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

## 8.8 Topologie

### 8.8.1 Topologie et espaces métriques

1. Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

2. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

3. Compacité.Équivalencedesdéfinitionsentermesdevaleursd'adhérence(Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

4. Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

5. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

### 8.8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\dot{\|}_p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

2. Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

3. Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace mé- trique, à valeurs dans un espace de Banach.

4. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

### 8.8.3 Espaces de Hilbert

1. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

2. Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces $l^2$ et $L^2$. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de Lax-Milgram. (

3. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1.

## 8.9 Calcul différentiel

### 8.9.1 Fonctions différentiables

1. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

2. Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'ap- plications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe $C^1$.

3. Applications de classe $C^k$. Dérivées partielles d'ordre $k$. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral.

4. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe $C^1$ et $C^2$ définies sur un ouvert convexe $\mathbb{R}^n$.

5. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

### 8.9.2 Équations différentielles

1. Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème des bouts).
2. Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).
3. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

### 8.9.3 Géométrie différentielle

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$, position par rapport au plan tangent.
2. Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Etude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc $C^1$.
3. Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

## 8.10 Calcul intégral

### 8.10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Défini- tion des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

### 8.10.2 Intégration

1. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.
2. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabi- lité des intégrales à paramètres.
3. Espaces $L^p$, où $1p\infty$. Complétude. Inégalité de Holder.
4. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.
5. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

### 8.10.3 Analyse de Fourier

1. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Diri- chlet, de Fejer et de Parseval.
2. Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème de Plancherel.

## 8.11 Probabilités

### 8.11.1 Définition d'un espace probabilisé

Evénements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

### 8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

1. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

2. Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Appli- cation aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

### 8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

1. Convergence en probabilité, dans $L^p$, presque surement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

2. Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

## 8.12 Distributions

### 8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide. Transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $S(\mathbb{R}^d)$. Multiplication par une fonction $C^\infty$ à croissance lente.

2. Espace $S'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées. Dérivation des distributions tempérées. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$). Multiplication par une fonction $C^\infty$ à croissance lente. Exemples de distributions tempérées : fonctions localement intégrables, masse de Dirac, valeur principale de Cauchy, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac.

3. Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

### 8.12.2 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes. Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension 1.

## 8.13 Méthodes numériques

### 8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition $LU$. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel); analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.
Décomposition en valeurs singulières.
Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien $1D$.

### 8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puis- sance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

### 8.13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

### 8.13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en $(n+1)$ points, estimation de l'erreur. 13.5 Équations différentielles ordinaires Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

### 8.13.5 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.

# Chapitre 9

# Anexe : Sujets du concours

## 9.1 Composition de mathématiques générales

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

EAE MAT 1

SESSION 2018

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

**EAE MAT 1**

**SESSION 2018**

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

**INFORMATION AUX CANDIDATS**

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|---|---|---|---|
| EAE | 1300A | 101 | 0376 |

**Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.**

**La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.**

**Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.**

## Notations

— Toutes les $\mathbf{C}$-algèbres considérées dans ce problème seront unitaires et l'on conviendra que les morphismes de $\mathbf{C}$-algèbres respecteront les éléments unités. La $\mathbf{C}$-algèbre des polynômes à coefficients complexes en une indéterminée $X$ sera notée $\mathbf{C}[X]$. Le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[X]$ formé des polynômes $P$ de degré $\deg P \leq n$ sera noté $\mathbf{C}_n[X]$.

— On notera $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices complexes à $n$ lignes et $p$ colonnes, $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ l'algèbre $\mathrm{M}_{n,n}(\mathbf{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ le groupe linéaire (groupe des matrices inversibles de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, on notera $\mathbf{C}[A] := \{P(A) \mid P \in \mathbf{C}[X]\}$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ engendrée par $A$.

— Le polynôme caractéristique de $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sera noté $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$ et son spectre $\mathrm{Sp}\, A$. Ce dernier sera le plus souvent considéré comme un *multiensemble*, c'est-à-dire que ses éléments peuvent avoir des multiplicités. Par exemple, le spectre de la matrice identité $I_n$ est $\mathrm{Sp}\, I_n = \{\!\{1, 1, \dots, 1\}\!\}$ ($n$ fois). Pour une matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle qu'une puissance de $N$ soit nulle), on a donc $\mathrm{Sp}\, N = \{\!\{0, 0, \dots, 0\}\!\}$ ; et pour une matrice unipotente $U \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (c'est-à-dire telle que $U - I_n$ soit nilpotente), $\mathrm{Sp}\, U = \{\!\{1, 1, \dots, 1\}\!\}$.

— On notera $[A, B] := AB - BA$ le commutateur de $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ (l'application $(A, B) \mapsto [A, B]$ est donc bilinéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$). On notera $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\alpha_i \in \mathbf{C}$ ; de même, si $A_i \in \mathrm{M}_{r_i}(\mathbf{C})$ pour $i = 1, \dots, k$, avec $r_1 + \cdots + r_k = n$, on écrira $\mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_k) \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$, la matrice diagonale par blocs correspondante.

— On rappelle le théorème suivant (*décomposition de* DUNFORD *d'une matrice, respectivement d'un endomorphisme*) :
• *Pour tout $A \in M_n(\mathbf{C})$, il existe un unique couple $(S, N) \in M_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $A = S + N$, $[S, N] = 0$, $S$ est diagonalisable et $N$ est nilpotente. On a alors : $\chi_A = \chi_S$ et $Sp\, A = Sp\, S$. De plus, $S, N \in \mathbf{C}[A]$, autrement dit, on peut écrire $S = P(A)$ et $N = Q(A)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*
• *Soit $V$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout endomorphisme $\phi$ de $V$, il existe un unique couple $(\phi_s, \phi_n)$ d'endomorphismes de $V$ tels que $\phi = \phi_s + \phi_n$, $[\phi_s, \phi_n] = 0$, $\phi_s$ est diagonalisable et $\phi_n$ est nilpotent. On a alors : $\chi_\phi = \chi_{\phi_s}$ et $Sp\, \phi = Sp\, \phi_s$. De plus, $\phi_s, \phi_n \in \mathbf{C}[\phi]$, autrement dit, on peut écrire $\phi_s = P(\phi)$ et $\phi_n = Q(\phi)$ avec $P, Q \in \mathbf{C}[X]$.*

— On rappelle que l'exponentielle de matrices est l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ définie par la formule :

$$\exp A := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k,$$

et que c'est une application $\mathcal{C}^\infty$ de l'espace vectoriel normé $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ dans lui-même, telle que, si $[A, B] = 0$, on ait $\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B)$.

— On pourra noter $|||A|||$ la norme matricielle subordonnée à une norme $||\cdot||$ quelconque sur $\mathbf{C}^n$ : on a donc $|||I_n||| = 1$ et, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $Y \in \mathbf{C}^n$, $||AY|| \leq |||A|||\ ||Y||$ et $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$.

Dans le problème, les textes placés entre les symboles ☛ ... ☚ précisent des notations et définitions qui sont utilisées dans la suite de l'énoncé.

# I Exercices préliminaires

1. Donner une décomposition de DUNFORD de la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C})$ (on discutera en fonction de $a \in \mathbf{C}$).
2. Justifier la relation $\exp(PAP^{-1}) = P(\exp A)P^{-1}$, où $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
3. Soient $n$ un entier, $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$ des complexes. Déterminer le noyau de l'application linéaire $P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{C}^n$ et en déduire que, si les $a_i$ sont deux à deux distincts :
$$\forall (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{C}^n \ , \ \exists ! P \in \mathbf{C}_{n-1}[X] \ : \ P(a_1) = b_1, \ldots, P(a_n) = b_n.$$
On ne cherchera pas à donner une forme explicite au *polynôme d'interpolation* $P$.
4. Montrer que toute représentation $\rho : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est de la forme $k \mapsto M^k$ pour une certaine matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. À quelles conditions deux telles représentations sont-elles équivalentes ?
5. Soit $G$ un groupe abélien noté additivement. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des morphismes de $G$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$, *i.e.* des applications $f : G \to \mathbf{C}^*$ telles que $\forall x, y \in G \ , \ f(x+y) = f(x)f(y)$. Pour tout $(f_1, f_2) \in \widehat{G}^2$, on note $f_1 f_2 : G \to \mathbf{C}^*$ l'application $x \mapsto f_1(x)f_2(x)$. Montrer qu'on munit ainsi $\widehat{G}$ d'une structure de groupe abélien.

# II La décomposition de DUNFORD

**Dans toute cette partie, $n$ désigne un entier fixé avec $n \geq 2$.**

1. Soient $A_1 = S_1 + N_1$, $A_2 = S_2 + N_2$ deux décompositions de DUNFORD. Démontrer l'équivalence logique :
$$[S_1, S_2] = [S_1, N_2] = [N_1, S_2] = [N_1, N_2] = 0 \iff [A_1, A_2] = 0.$$
[*Indication : on pourra, pour l'implication directe, utiliser la bilinéarité du commutateur ; pour l'implication réciproque, le fait que $S_i, N_i \in \mathbf{C}[A_i]$.*]
2. (a) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie diagonale (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients au dessus de la diagonale) et $N \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ sa partie triangulaire supérieure stricte (obtenue en remplaçant par 0 tous les coefficients diagonaux), de sorte que $A = S + N$. À quelles conditions est-ce une décomposition de DUNFORD ?

   (b) On suppose de plus que $S$ est de la forme $\mathrm{Diag}(\alpha_1 I_{r_1}, \ldots, \alpha_k I_{r_k})$, où $r_1 + \cdots + r_k = n$ et où $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{C}$ sont deux à deux distincts. Que deviennent les conditions ci-dessus ?
   [*Indication : on exprimera $N$ sous forme de matrice par blocs de tailles $r_i \times r_j$.*]
3. (a) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Démontrer l'existence d'un unique couple $(T, U) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})^2$ de matrices telles que $B = TU$, $[T, U] = 0$, $T$ est diagonalisable et $U$ est unipotente.

   (b) Vérifier que l'on a alors les propriétés suivantes : $\chi_B = \chi_T$, $\mathrm{Sp}\, B = \mathrm{Sp}\, T$ et $T, U \in \mathbf{C}[B]$.

   (c) Soient $B_1 = T_1 U_1$, $B_2 = T_2 U_2$ deux telles décompositions. Démontrer l'équivalence logique :
$$[B_1, B_2] = 0 \iff [T_1, T_2] = [T_1, U_2] = [U_1, T_2] = [U_1, U_2] = 0.$$
4. (a) Soit $S \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $S = PDP^{-1} = P'D'P'^{-1}$, où $P, P' \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et où $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $D' = \mathrm{Diag}(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, de sorte que :
$$\mathrm{Sp}\, S = \{\!\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\!\} = \{\!\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}\!\}.$$

(On rappelle que, dans cette notation de multiensembles, les éléments sont présents avec une multiplicité.) Soient $\Omega$ un sous-ensemble de $\mathbf{C}$ contenant Sp $S$ et $f$ une application définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Démontrer l'égalité :

$$P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1} = P'\mathrm{Diag}(f(\alpha'_1),\dots,f(\alpha'_n))P'^{-1}.$$

[*Indication : on pourra introduire un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ interpolant $f$ sur Sp $S$ et calculer $F(S)$ de deux manières différentes.*]

(b) Dans le cas où $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est la fonction définie par la série entière de rayon de convergence infini $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$, vérifier que la matrice ci-dessus est égale à $\sum_{k\geq 0} a_k S^k$. On précisera soigneusement le sens donné à cette somme infinie de matrices.

☛ Indépendamment de la nature de $f$, la matrice $P\mathrm{Diag}(f(\alpha_1),\dots,f(\alpha_n))P^{-1}$ sera dorénavant notée $f(S)$. D'après la question ci-dessus, dans le cas de la fonction exponentielle $f = \exp$, cette notation est cohérente avec la définition de l'exponentielle de matrices rappelée en introduction.☚

# III L'exponentielle $\exp : \mathbf{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective

1. (a) Soient $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbf{C}^*$ des complexes non nuls. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbf{C}$ tels que, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\exp(\alpha_i) = \beta_i$. Soit enfin $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Notant $T := P\mathrm{Diag}(\beta_1,\dots,\beta_n)P^{-1}$ et $S := P\mathrm{Diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)P^{-1}$, vérifier que $\exp S = T$.

   (b) On suppose de plus que, pour tous $i,j \in \{1,\dots,n\}$, on ait $\beta_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$. Montrer que $S \in \mathbf{C}[T]$.

   [*Indication : on pourra utiliser un polynôme $F \in \mathbf{C}[X]$ tel que $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ , $F(\beta_i) = \alpha_i$.*]

   (c) Montrer que, si $T$, $P$ et les $\beta_i$ sont donnés, on peut toujours choisir des $\alpha_i$ de sorte que soit vérifiée l'hypothèse de la question précédente.

   (d) Montrer que, si l'on ne fait pas cette hypothèse sur les $\alpha_i$, la conclusion $S \in \mathbf{C}[T]$ peut être en défaut.

   [*Indication : on pourra prendre $T = P = I_2$.*]

2. Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit les polynômes suivants dans $\mathbf{C}[X]$ :

$$E_n(X) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k \text{ et } L_n(X) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (X-1)^k.$$

   Par convention, $L_1(X) = 0$. Soient $P, Q, R \in \mathbf{C}[X]$ ; on notera $P \equiv Q \pmod{R}$ la congruence modulo $R$ dans l'anneau $\mathbf{C}[X]$.

   (a) Montrer que $L_n \circ E_n \equiv X \pmod{X^n}$ et $E_n \circ L_n \equiv X \pmod{(X-1)^n}$.

   [*Indication : on pourra utiliser les développements de* TAYLOR *des fonctions usuelles $x \mapsto \exp x$ en 0 et $x \mapsto \ln(x)$ en 1.*]

   (b) À l'aide de ces formules, justifier très soigneusement le fait que les applications $N \mapsto \exp N$ et $U \mapsto L_n(U)$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre l'ensemble des matrices nilpotentes et l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$.

3. Déduire des questions précédentes que l'application $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est surjective.

## IV La fonction matricielle $z^A$ et sa monodromie

On note $\mathscr{O}$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe $\Omega := \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \subset \mathbf{C}^*$ (où $\mathbf{R}_-$ désigne la demi-droite réelle $]-\infty, 0]$) ; cet anneau est commutatif et intègre.
On rappelle qu'il existe une unique fonction continue log sur $\Omega$ (détermination principale du logarithme sur $\Omega$) telle que, notant $\mathrm{Id}_\Omega$ la fonction identité de $\Omega$ :

$$\exp \circ \log = \mathrm{Id}_\Omega \quad \text{et} \quad \log 1 = 0;$$

de plus, $\log \in \mathscr{O}$, et la restriction de log à $\mathbf{R}_+^* = ]0, +\infty[$ est le logarithme népérien. Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, on note :

$$z^\alpha := \exp(\alpha \log z).$$

Pour $\alpha \in \mathbf{Z}$, on retrouve les puissances usuelles. Plus généralement, on a $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$. On s'autorise l'abus usuel de notation qui permet de noter $z^\alpha$ l'application $z \mapsto z^\alpha$. Avec cette convention, $z^\alpha \in \mathscr{O}$.
On note $\delta : f \mapsto z\dfrac{df}{dz}$ la « dérivation d'EULER » ; c'est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathscr{O}$ dans lui-même vérifiant la *règle de* LEIBNIZ :

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g.$$

1. Calculer $\delta(\log)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $\delta(z^\alpha)$.
2. Vérifier que les déterminations du logarithme sur $\Omega$ (*i.e.* les fonctions continues $f : \Omega \to \mathbf{C}$ telles que $\exp \circ f = \mathrm{Id}_\Omega$) sont les fonctions $Log^{(k)} : z \mapsto \log z + 2ki\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

☛ Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $z \in \Omega$, on pose $z^A := \exp((\log z)A)$. ☚

3. (a) Soit $A = S + N$ une décomposition de DUNFORD, avec $S = P\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)P^{-1}$. Démontrer les égalités :

$$z^S = P\mathrm{Diag}(z^{\alpha_1}, \ldots, z^{\alpha_n})P^{-1}, \quad z^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\log z)^k N^k \quad \text{et} \quad z^A = z^S z^N = z^N z^S.$$

   (b) Calculer le déterminant de $z^A$.

☛ Les matrices dont les coefficients sont des fonctions sur $\Omega$ seront dénotées par des majuscules "script" $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$,... On identifiera une telle matrice $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathscr{O})$ à la fonction à valeurs matricielles de $\Omega$ dans $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ qui, à $z \in \Omega$, associe $\mathscr{X}(z) := (f_{i,j}(z))_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. ☚

4. Montrer que les coefficients de la fonction matricielle $z \mapsto z^A$ sont des combinaisons linéaires de fonctions $z^\alpha(\log z)^k$, où $\alpha \in \mathrm{Sp}\, A$ et où $k \in \mathbf{N}$, $k < d$, l'entier $d$ désignant l'ordre de nilpotence de $N$.

On notera abusivement $z^A$ la fonction $z \mapsto z^A$. On a donc $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathscr{O})$.

☛ L'application $\delta$ s'étend naturellement aux matrices de fonctions : si $\mathscr{X} = (f_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, alors on pose : $\delta(\mathscr{X}) := (\delta(f_{i,j}))_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. Ce prolongement est $\mathbf{C}$-linéaire et vérifie encore la règle de LEIBNIZ pour le produit matriciel usuel :

$$\delta(\mathscr{X}\mathscr{Y}) = \mathscr{X}\delta(\mathscr{Y}) + \delta(\mathscr{X})\mathscr{Y}. \quad ☚$$

5. Soient $f \in \mathscr{O}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer $\delta(\exp(f(z)A))$. Vérifier en particulier que :

$$\delta(z^A) = Az^A = z^A A.$$

6. Soient $\mathscr{X} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathscr{O})$ une matrice de fonctions holomorphes sur $\Omega$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que $\delta(\mathscr{X}) = A\mathscr{X}$. Montrer qu'il existe une matrice constante $C \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ telle que $\mathscr{X} = z^A C$.
[*Indication : on commencera par montrer qu'il existe un tel $C \in M_{n,p}(\mathscr{O})$, puis que $\delta(C) = 0$.*]
7. On introduit d'autres « déterminations de $z^A$ » en posant, pour tout $k \in \mathbf{Z}$ (avec la notation introduite question 2) :
$$\left[z^A\right]_k := \exp(Log^{(k)}(z)A).$$
   (a) À l'aide de la question 5, montrer que $\delta\left[z^A\right]_k = A\left[z^A\right]_k = \left[z^A\right]_k A$ et en déduire, à l'aide de la question 6, l'existence d'une unique matrice $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\left[z^A\right]_k = z^A M_k$.
   (b) Calculer $M_k$ et montrer que l'application $k \mapsto M_k$ est une représentation de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On notera $\rho_A : \mathbf{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ cette représentation.
8. Que peut-on déduire de l'exercice préliminaire n° 4 à propos des représentations introduites ci-dessus ?

# V Algèbres différentielles et automorphismes différentiels

Dans cette partie et la suivante, on fixe une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ et l'on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) : on a donc $\mathrm{Sp}\, A = \{\!\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}\!\}$. On note $\mathscr{A} := \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_n}]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par les fonctions $z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_n}$ et l'on pose :

$$L := \{m_1\alpha_1 + \dots + m_n\alpha_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbf{N}\}.$$

1. (a) Vérifier que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{A}$ est engendré par la famille des fonctions $z^l$ avec $l \in L$, autrement dit :
$$\mathscr{A} = \sum_{l \in L} \mathbf{C} z^l.$$
   (b) Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par la dérivation $\delta$.
   (c) Montrer que les fonctions $z^l$ avec $l \in L$, forment une base du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathscr{A}$.
   [*Indication : soit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^{l_i} = 0$ une relation linéaire entre des éléments de la famille des $z^l$, $l \in L$, les $l_i \in L$ étant distincts ; on pourra appliquer itérativement $\delta$ à cette relation.*]
   (d) Soient $l \in L$ et $u, v \in \mathscr{A}$ tels que $\delta v = lv$ et $\delta u - lu = v$. Montrer que $v = 0$ et $u \in \mathbf{C}z^l$.

☛ On note $\mathscr{A}' := \mathscr{A}[\log] = \mathbf{C}[z^{\alpha_1}, \dots, z^{\alpha_n}, \log]$ la sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathscr{O}$ engendrée par $\mathscr{A}$ et par la fonction log. ☚

2. (a) On note $\log^k$ la puissance $k$-ème de la fonction log, *i.e.* la fonction $z \mapsto (\log z)^k$. Montrer que
$$\mathscr{A}' = \left\{ \sum_{k \geq 0} f_k \log^k \mid \text{ les } f_k \in \mathscr{A} \text{ étant presque tous nuls} \right\}.$$
   (b) Montrer que $\mathscr{A}'$ est stable par la dérivation $\delta$. Pour cela, on explicitera des $g_k \in \mathscr{A}$ tels que $\delta(\sum f_k \log^k) = \sum g_k \log^k$.
3. On pourra admettre les résultats de cette question dans un premier temps.

(a) Soient $u, v \in \mathcal{A}$ tels que $u + v\log = 0$. Montrer que $u = v = 0$.
[*Indication : par l'absurde, choisir u et v tels que l'écriture* $v = \lambda_1 z^{l_1} + \cdots + \lambda_p z^{l_p}$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}^*$ *et* $l_1, \ldots, l_p \in L$ *deux à deux distincts ait une « longueur » p minimale et généraliser les techniques développées à la question 1.*]

(b) Montrer que l'écriture $\sum f_k \log^k$ d'un élément de $\mathcal{A}'$ est unique.
[*Indication : d'une relation* $\sum_{k=0}^{p} f_k \log^k = 0$ *avec* $f_p \neq 0$ *et p minimal, déduire par application de* $\delta$ *une relation plus courte donc triviale, puis que* $\delta(f_{p-1}/f_p) = -p$*, et se ramener à la question précédente.*]

☛ Pour toute sous-$\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$, on note $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ le groupe des automorphismes de $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{B}$ (la loi interne sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ étant la composition). Si de plus $\mathcal{B}$ est stable par $\delta$, on note :

$$\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B}) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}) \mid \sigma \circ \delta = \delta \circ \sigma\}.$$ ☚

4. Soit $\mathcal{B}$ une sous $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathcal{O}$ stable par $\delta$. Vérifier que $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{B})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$.

☛ Pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$, on étend son action aux matrices sur $\mathcal{B}$ en posant :

$$\text{pour tout } \mathcal{X} := (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}) \text{ , } \sigma(\mathcal{X}) := (\sigma(m_{i,j}))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathcal{B}).$$

On a alors les règles suivantes, que l'on admet : l'action de $\sigma$ est $\mathbf{C}$-linéaire et $\sigma(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \sigma(\mathcal{X})\sigma(\mathcal{Y})$.
☚

5. (a) Montrer que les coefficients de la matrice $z^A \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O})$ sont éléments de $\mathcal{A}'$.
   (b) Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et notons $\mathcal{X} := \sigma(z^A)$. Vérifier que $\delta\mathcal{X} = A\mathcal{X}$ et en déduire l'existence d'une unique matrice $M_\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\mathcal{X} = z^A M_\sigma$.
   (c) Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est une représentation du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

Cette représentation sera notée $\rho'_A$.

# VI Groupes et représentations de PICARD-VESSIOT

**Les notations $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $L$ de la partie précédente restent en vigueur dans cette partie.**

1. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\sigma(\log) = \log + \lambda$. On le notera $\lambda_\sigma$.
   (b) Montrer que, pour tout $l \in L$, il existe un unique $c_l \in \mathbf{C}^*$ tel que $\sigma(z^l) = c_l z^l$. Vérifier que, pour tous $l, l' \in L$, on a $c_{l+l'} = c_l c_{l'}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par $\sigma$ et que la restriction $\sigma_{|\mathcal{A}}$ appartient à $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.
2. (a) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'application $\psi : \sigma \mapsto (\sigma_{|\mathcal{A}}, \lambda_\sigma)$ est un morphisme de groupes injectif de $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ dans le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}) \times \mathbf{C}$, produit direct du groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et du groupe additif $\mathbf{C}$.
   (b) Soient $\sigma_0 \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. À l'aide de la question 3 de la partie V, montrer qu'il existe un unique automorphisme $\sigma$ de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathcal{A}'$ tel que $\sigma_{|\mathcal{A}} = \sigma_0$ et $\sigma(\log) = \log + \lambda$.

(c) Montrer que $\sigma \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$ et en déduire que le morphisme de la question 2(a) est un isomorphisme.

☛ On note $G$ le sous-groupe du groupe additif $\mathbf{C}$ engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On a donc (et on l'admet) :

$$G = \mathbf{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbf{Z}\alpha_n = \{m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n \mid m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{et} \quad G = L - L = \{l_1 - l_2 \mid l_1, l_2 \in L\}.$$

On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes du groupe $G$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ (exercice préliminaire n° 5). ☚

3. Démontrer qu'il existe $m \in \{1, \dots, n\}$ tel que $G \simeq \mathbf{Z}^m$ et en déduire que $\widehat{G} \simeq (\mathbf{C}^*)^m$.
4. (a) Soit $f \in \widehat{G}$. Montrer l'existence d'un unique $\sigma_f \in \mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$ tel que :

$$\forall l \in L\,,\ \sigma_f(z^l) = f(l) z^l.$$

[*Indication : on pourra commencer par définir un automorphisme d'espace vectoriel puis démontrer qu'il respecte la multiplication et l'unité et qu'il commute avec* $\delta$.]

   (b) Montrer que l'application $f \mapsto \sigma_f$ est un isomorphisme du groupe $\widehat{G}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A})$.

☛ Des questions 2 et 4, on déduit l'existence d'un isomorphisme du groupe produit $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ sur le groupe $\mathrm{Aut}_{PV}(\mathcal{A}')$, que l'on notera $\phi_A : (f, \lambda) \mapsto \sigma_{f,\lambda}$. ☚

5. Décrire explicitement la représentation $\rho''_A := \rho'_A \circ \phi_A$ de $\widehat{G} \times \mathbf{C}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ (la représentation $\rho'_A$ a été définie à la fin de la partie V).
6. Définir un morphisme de groupes $\varphi : \mathbf{Z} \to \widehat{G} \times \mathbf{C}$ tel que $\rho''_A \circ \varphi = \rho_A$ (la représentation $\rho_A$ a été définie à la question 7 de la partie IV).

## 9.2 Composition d'analyse et probabilités

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

**EAE MAT 2**

**SESSION 2018**

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

**EAE MAT 2**

**SESSION 2018**

# AGREGATION
# CONCOURS EXTERNE

## Section : MATHÉMATIQUES

## COMPOSITION D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Durée : 6 heures

*L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.*

*Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.*

*De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.*

**NB :** ***La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

**Tournez la page S.V.P.**

## INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

| Concours | Section/option | Epreuve | Matière |
|---|---|---|---|
| EAE | 1300A | 102 | 2678 |

**Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits.**

**La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc les candidats à produire des raisonnements clairs, complets et concis.**

**Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.**

# Notations

— Soit $N$ un entier naturel non-nul. Pour $a = (a_1, ..., a_N)$ et $b = (b_1, ..., b_N)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^N$, on note $a \cdot b = \sum_{j=1}^N a_j b_j$ le produit scalaire euclidien et $||a|| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |a_j|^2}$ la norme associée. On notera $B(0, R)$ la boule fermée de $\mathbf{R}^N$ définie par $\{x \in \mathbf{R}^N,\ ||x|| \leq R\}$.

— Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par $L^p(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f$ définies sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou dans $\mathbf{C}$, telles que $x \mapsto |f(x)|^p$ est intégrable (au sens de la mesure de LEBESGUE). On note $L^\infty(\mathbf{R}^N)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f$ définies sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans $\mathbf{C}$, pour lesquelles il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ est satisfait pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ (au sens de la mesure de LEBESGUE).

— Pour $f$ une fonction définie sur $\mathbf{R}^N$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$ ou dans $\mathbf{C}$, on désigne par $\mathrm{supp}(f)$ son *support* : $\mathrm{supp}(f) = \mathbf{R}^N \setminus \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est la réunion de tous les ouverts sur lesquels $f$ est nulle presque partout. En particulier, pour presque tout $x \notin \mathrm{supp}(f)$, on a $f(x) = 0$.

— Pour $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^N$, on note, pour $i \in \{1, ..., N\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée de $f$ par par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable.

— Pour tout borélien $B \subset \mathbf{R}^N$, on note $\mathrm{mes}(B) = \int_B \mathrm{d}x$ sa mesure et on désigne par $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de cet ensemble $B$ : $\mathbf{1}_B(x)$ vaut 1 si $x \in B$ et vaut 0 si $x \notin B$.

— Soit $f$ une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^N$. On définit **sa transformée de FOURIER** par

$$\widehat{f} : \xi \in \mathbf{R}^N \longmapsto \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

— Soit $f$ une fonction mesurable sur $[0, \infty[$, on définit **sa transformée de LAPLACE** par

$$z \in \mathbf{C} \mapsto L(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\ \mathrm{d}t, \tag{L}$$

là où elle est bien définie.

Le sujet débute par trois questions préliminaires qui serviront dans la suite du problème mais qui peuvent être traitées de manière indépendante. L'objectif de la partie II est d'établir des propriétés de la transformée de LAPLACE et d'en déduire une résolution d'équations différentielles. Les parties suivantes sont centrées sur la transformée de FOURIER, des propriétés fondamentales sont établies dans les parties III et IV et les parties suivantes V, VI et VII sont consacrées à l'étude d'un espace de HILBERT et des propriétés topologiques de suites de fonctions dans cet espace de HILBERT. Les parties sont généralement indépendantes ; en cas de besoin, on pourra admettre les résultats établis par certaines questions pour aborder les parties suivantes.

# Rappels

*On rappelle ici quelques définitions utiles et des énoncés qui pourront être exploités* ***sans démonstration*** *tout au long du sujet.*

— L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^N$ à support compact, noté $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N)$, est dense dans $L^1(\mathbf{R}^N)$.

— Soient $E, F$ deux espaces vectoriels normés. Soit $D \subset E$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions définies sur $D$ à valeurs dans $(F, \|.\|_F)$.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *équibornée* si et seulement s'il existe $K > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout $x \in D$, on a $\|f(x)\|_F \leq K$.
On dit que la famille $\mathcal{F}$ est *équicontinue* sur $D$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in D$, si $||x-y||_E \leq \eta$ alors, quel que soit $f \in \mathcal{F}$, on a $\|f(x)-f(y)\|_F \leq \epsilon$.

— **Théorème d'Arzela-Ascoli**
Soit $D \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble *compact* et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues sur $D$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ telle que
- $\mathcal{F}$ est équicontinue,
- pour tout $x \in D$, l'ensemble $\{f(x),\ f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans $\mathbf{C}$.

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans l'ensemble des fonctions continues sur $D$ à valeurs dans $\mathbf{C}$, noté $(\mathcal{C}(D, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$, muni de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$.

— **Théorème d'inversion de la transformée de Fourier**
Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^N)$, on a, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} e^{i x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

— **Théorème de Plancherel**
La restriction de la transformée de Fourier à $L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^2(\mathbf{R}^N)$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R}^N)$ sur $L^2(\mathbf{R}^N)$, que l'on note encore $f \mapsto \widehat{f}$, et pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbf{R}^N)$ on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbf{R}^N} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, \mathrm{d}\xi.$$

Il s'ensuit que, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^N} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

— **Convolution et transformée de Fourier**
Pour $f$ et $g$ deux éléments de $L^1(\mathbf{R}^N)$, on pose

$$x \in \mathbf{R}^N \longmapsto f * g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-t)g(t)\, \mathrm{d}t$$

qui définit une fonction de $L^1(\mathbf{R}^N)$. On a alors, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$, $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

# I Exercices préliminaires

Cette partie est consacrée à trois résultats généraux et indépendants entre eux. Lorsqu'ils seront utiles dans la suite du problème, une référence claire y sera faite. Le troisième exercice est plus exigeant techniquement et n'intervient que dans la Partie VII du problème.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ telle que $\int_0^1 u^n g(u)\, du = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $g$ est l'application nulle.
2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction bien définie, continue et bornée sur $\mathbf{R}^N$.
3. Soit $D$ un ensemble *compact* de $\mathbf{R}^N$. On considère une suite de fonctions $\left(u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $D$ et à valeurs réelles qui vérifie les trois propriétés suivantes

   i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $u_n$ est continue sur $D$,
   ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in D$, on a $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$,
   iii) pour tout $x \in D$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, où la fonction $u$ est continue sur $D$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $u$ *uniformément* sur $D$.

# II Autour de la transformée de Laplace

1. Soit $f$ une fonction mesurable sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{C}$. On note

$$\Lambda(f) = \{s \in \mathbf{R} \text{ tel que } t \mapsto |f(t)|e^{-st} \in L^1([0,+\infty[)\}.$$

   Montrer que si $s \in \Lambda(f)$ alors pour tout $s' > s$ , $s' \in \Lambda(f)$. En déduire que si l'ensemble $\Lambda(f)$ est non vide, alors c'est un intervalle non borné à droite.

   On appelle alors *abscisse de sommabilité* de $f$, l'élément $\sigma(f)$ appartenant à $\overline{\mathbf{R}}$ défini par

$$\sigma(f) = \inf\left(\Lambda(f)\right).$$

   On s'intéresse à la transformée de Laplace (L) de $f$.

   On note $\Sigma$ l'ensemble des fonctions mesurables qui admettent une abscisse de sommabilité dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ :

2. Montrer que $L(f)$ est bien définie sur le demi-plan $P_{\sigma(f)} = \{z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}(z) > \sigma(f)\}$.
3. Montrer que $L(f)$ est une fonction holomorphe sur $P_{\sigma(f)}$ et exprimer les dérivées $n^{\text{èmes}}$ de $L(f)$ sous forme d'intégrales puis sous forme de transformées de Laplace.
4. On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\infty[$ et on désigne par $\sigma(f')$ l'abscisse de sommabilité de $f'$, qu'on supposera finie. On pose $\beta = \max(\sigma(f), \sigma(f'))$ et on note $P_\beta = \{z \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}(z) > \beta\}$. Montrer que, pour tout $z \in P_\beta$, on a $L(f')(z) = zL(f)(z) - f(0)$.
5. Déterminer les abscisses de sommabilité et transformées de Laplace (lorsque cela est possible) des fonctions suivantes. Le cas échéant, on justifiera que ces transformées de Laplace sont prolongeables en des fonctions méromorphes sur $\mathbf{C}$ en précisant le ou les pôles de ces fonctions.
   (a) $t \mapsto \sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (b) $t \mapsto \cos(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (c) $t \mapsto t\sin(\omega t)$, avec $\omega \in \mathbf{R}$.
   (d) $t \mapsto e^{t^2}$.

6. L'objectif de cette section est de démontrer que la transformée de LAPLACE est une application injective sur le sous-ensemble $\Sigma' = \{f : [0, +\infty[\mapsto \mathbf{C}, \text{ continue}, \sigma(f) < +\infty\}$ de $\Sigma$.

   (a) Soit $f \in \Sigma'$. Soient $x \in \mathbf{R}$ tel que $x > \sigma(f)$ et $a > 0$.
   Pour $t \geq 0$, on pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$. Montrer que

$$L(f)(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\ dt.$$

   (b) On suppose, de plus, que $L(f) = 0$.

      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n\, h(-\ln(u))\, du$ existe et vaut 0.

      ii. Conclure en se servant de la question 1 de la partie I.

7. On considère le problème

$$\textbf{(P1)} \qquad y'' + y = 2\cos(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

   (a) Justifier l'existence, sans calcul, d'une unique solution $f_1$ définie sur $\mathbf{R}_+$ de **(P1)**.

   (b) On suppose que $\sigma(f_1)$ et $\sigma(f_1')$ sont finis. Justifier que la transformée de LAPLACE de $f_1$ vérifie, pour un certain $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$ que l'on ne cherchera pas à déterminer, la relation suivante pour tout $z \in P_\beta$

$$L(f_1)(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} + \frac{1}{z^2+1}.$$

   (c) En déduire l'expression de la solution $f_1$.

# III Transformée de FOURIER en dimension 1

1. Un premier exemple.
   Soit $b \in ]0, +\infty[$. On pose $f_b = \mathbf{1}_{[-b,b]}$.

   (a) Déterminer la transformée de FOURIER de $f_b$.

   (b) A-t-on $\widehat{f_b}$ dans $L^1(\mathbf{R})$ ?

2. Un deuxième exemple.
   Soit $a > 0$. On considère les fonctions $f_a : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-ax^2}$ (définie sur $\mathbf{R}$) et $g_a : z \in \mathbf{C} \mapsto e^{-az^2}$ (définie sur $\mathbf{C}$).

   (a) Vérifier que $f_a \in L^1(\mathbf{R})$.

   (b) En considérant la fonction $g_a$ et un contour fermé adéquat établir qu'on a, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-(\sqrt{a}x + i\frac{\xi}{2\sqrt{a}})^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\, du.$$

   (c) En déduire l'expression de $\widehat{f_a}$.
   *[Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, l'égalité $\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$.]*

   (d) Montrer que $\widehat{f_a}$ admet également une transformée de FOURIER et l'exprimer en fonction de $f_a$.

3. Soit $K : x \in \mathbf{R} \mapsto e^{-|x|}$. Montrer que $K$ admet une transformée de FOURIER et la déterminer.

4. On considère le problème **(P2)** : $y'' - y = f$.
On note $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions $g$ indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et telles que pour tous entiers $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, on a
$$p_{\alpha,\beta}(g) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |x^\alpha g^{(\beta)}(x)| < +\infty.$$

(a) On suppose dans cette question que $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$.

i. Soit $y$ une solution de **(P2)** qui admet une transformée de Fourier, notée $\widehat{y}$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}$, on a $\widehat{y}(\xi) = -\frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}$.

ii. En utilisant les résultats de la question 3 de cette partie et les résultats rappelés en début de sujet, montrer que **(P2)** admet une unique solution $y \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$.

(b) On suppose maintenant que $f \in L^2(\mathbf{R})$.

i. On introduit la fonction définie par $g : \xi \in \mathbf{R} \longmapsto g(\xi) = -\frac{\widehat{f}(\xi)}{1+\xi^2}$. Montrer qu'il existe un unique $y \in L^2(\mathbf{R})$ tel que $\widehat{y} = g$.

ii. Montrer que $y$ est une solution faible de $y'' - y = f$, c'est à dire qui vérifie, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, la relation
$$\int_{\mathbf{R}} y(x)(-\varphi(x) + \varphi''(x))\ \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)\ \mathrm{d}x.$$

# IV Transformée de Fourier en dimension 2

1. Soit $a > 0$. On note $h : x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mapsto \exp\left(-a(x_1^2 + x_2^2)\right)$.
Montrer que $h \in L^1(\mathbf{R}^2)$ et déterminer sa transformée de Fourier.
*[Indication : on pourra se servir de la question 2 de la partie III.]*

2. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ à support compact.

(a) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ admet une transformée de Fourier et que pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2$ on a
$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi) = i\xi_1 \widehat{f}(\xi)$$

(b) En déduire qu'il existe $C_f > 0$, dépendant de $f$, telle que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ on a $|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C_f}{||\xi||}$.

3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ alors on a $\lim\limits_{||\xi|| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

4. Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ alors $\widehat{f}$ est uniformément continue.
*[Indication : on pourra utiliser la question 2 de la partie I.]*

# V Etude d'un espace de Hilbert

*Dans toute la suite, $\alpha$ désigne un réel* positif ou nul. *On désigne par $H^\alpha$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^2 \to \overline{\mathbf{R}}$ de $L^2(\mathbf{R}^2)$ telles que*
$$\|f\|_{H^\alpha}^2 := \int_{\mathbf{R}^2} (1 + ||\xi||^{2\alpha})\ |\widehat{f}(\xi)|^2\, \mathrm{d}\xi < \infty.$$

1. Soit $(h_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbf{R}^2$ qui tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$. Montrer que $\left(g_n : x \mapsto e^{-ix\cdot h_n} - 1\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $B(0,R)$, pour tout réel $0 < R < \infty$.
2. Déterminer l'ensemble des réels $\alpha \geq 0$ tels que l'intégrale

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\mathrm{d}\xi}{1 + ||\xi||^{2\alpha}}$$

soit finie.

*Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.*

3. Soit $f \in H^\alpha$ avec $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbf{R}^2)$.
   (b) En déduire que $f$ admet un représentant continu et borné, c'est-à-dire est égale presque partout à une fonction continue et bornée.
   *[Indication : on pourra utiliser, sans plus de justification, le fait que, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$ vérifie $\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$, alors $f$ est nulle presque partout. On pourra également exploiter le résultat de la question 2 de la partie I.]*
4. Soit $\alpha > 0$. L'objectif est de montrer que $H^\alpha$ est un espace de HILBERT.
   (a) Justifier que $H^\alpha$ et $\|\cdot\|_{H^\alpha}$ définissent un espace préhilbertien.
   (b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $H^\alpha$.
      i. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, qu'on notera $g$, dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
      ii. Montrer que $g \in H^\alpha$.
      *[Indication : on pourra[1] remarquer d'abord qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $0 < R < \infty$, on a $\int_{B(0,R)} (1 + ||\xi||^{2\alpha})|\widehat{g}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq C$.]*
      iii. Conclure que $H^\alpha$ est un espace de HILBERT.
5. Soit $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ (c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\|f_n\|_{L^2} \leq A$) et telle qu'il existe $0 < M < \infty$ vérifiant $\mathrm{supp}(f_n) \subset B(0,M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Montrer que, pour tout $0 < R < \infty$, la suite $\left(\widehat{f}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est équibornée et équicontinue sur $B(0,R)$.
   (b) On suppose de plus que $\left(f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $H^\alpha$ pour $\alpha > 0$. En déduire que l'ensemble $\left\{\widehat{f}_n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
   (c) En conclure, sous les hypothèses du b), que l'ensemble $\left\{f_n,\ n \in \mathbf{N}\right\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

# VI Une propriété de régularisation

Dans cette partie on s'intéresse à une suite de fonctions $f_n : (x,k) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \mapsto f_n(x,k) \in \mathbf{R}$ qui vérifie

$$\textbf{(H1)} \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |f_n(x,k)|^2 \,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x = M_0 < \infty,$$

$$\textbf{(H2)} \qquad \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |k \cdot \nabla_x f_n(x,k)|^2 \,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x = M_1 < \infty,$$

1. mais d'autres approches sont possibles.

et telle que $\mathrm{supp}(f_n) \subset \{(x,k) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2,\ ||x|| \leq R,\ ||k|| \leq R\}$ et où on a utilisé la notation abrégée

$$k \cdot \nabla_x = \sum_{j=1}^{2} k_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Les dérivées sont ici comprises au sens des distributions et sont supposées être $L^2$ « au sens faible » suivant [2] : on a $f \in L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ et on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$, on a

$$\left| \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} f(x,k)\ k \cdot \nabla_x \psi(x,k)\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}x \right| \leq C \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}.$$

Dans ce cas on écrit $k \cdot \nabla_x f \in L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$ et on note

$$\begin{aligned} \|k \cdot \nabla_x f\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)} &= \left( \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} |k \cdot \nabla_x f(x,k)|^2\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &:= \sup \left\{ \frac{\left| \int_{\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} f(x,k)\ k \cdot \nabla_x \psi(x,k)\, \mathrm{d}k\, \mathrm{d}x \right|}{\|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}},\ \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2) \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned}$$

**Dans toute la suite, $R$ désigne un réel strictement positif, quelconque.**

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ *à support compact* telle que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \{k \in \mathbf{R}^2,\ ||k|| \leq R\} = B(0,R)$. On pose

$$\rho_n(x) = \int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k)\, \varphi(k)\, \mathrm{d}k.$$

On va être amené à manipuler des *transformations de* FOURIER *partielles*. On note alors

$$\widehat{f}_n(\xi,k) = \int_{\mathbf{R}^2} f_n(x,k) e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x,$$

et

$$\widehat{\rho}_n(\xi) = \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}_n(\xi,k)\, \varphi(k)\, \mathrm{d}k. \qquad (\star)$$

Enfin, on pourra exploiter sans plus de justification le fait que $\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)}$ sont des normes équivalentes sur $L^2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2)$.

*L'objectif de cette partie et de la suivante (sous des hypothèses plus faibles) est de montrer que l'ensemble $\{\rho_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ est en fait relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.*

1. Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
2. Justifier que la formule $(\star)$ définissant $\widehat{\rho}_n(\xi)$ a bien un sens pour presque tout tout $\xi \in \mathbf{R}^2$.
3. Soit $\epsilon > 0$. Pour $\xi \neq 0$, on introduit les domaines

$$\mathcal{B}_\epsilon(\xi) = \left\{k \in \mathbf{R}^2,\ |\xi \cdot k| \leq \epsilon||\xi||\right\}, \qquad \mathcal{G}_\epsilon(\xi) = \left\{k \in \mathbf{R}^2,\ |\xi \cdot k| > \epsilon||\xi||\right\}.$$

   Puis on pose $\widehat{\rho}_n = \mu_n + \nu_n$ avec

$$\mu_n(\xi) = \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\, \varphi(k)\, \mathrm{d}k, \qquad \nu_n(\xi) = \int_{\mathcal{G}_\epsilon(\xi)} \widehat{f}_n(\xi,k)\, \varphi(k)\, \mathrm{d}k.$$

2. Il n'est pas nécessaire de s'attarder sur le cadre fonctionnel décrit ci-dessous qui précise le cadre de travail. On peut aborder les questions suivantes directement.

(a) Représenter graphiquement le domaine $\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)$ pour $0 < \epsilon \ll 1$.

(b) Pour $\xi \neq 0$ fixé, on note $u_1 = \frac{\xi}{||\xi||}$ et $u_2$ tel que $(u_1, u_2)$ soit une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ pour sa structure euclidienne canonique. Montrer que pour tout vecteur $k$ de $\mathbf{R}^2$ de coordonnées dans la base canonique $(k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$, il existe un unique couple $(k'_1, k'_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que $k = k'_1 u_1 + k'_2 u_2$.
Montrer que $(k_1, k_2) \mapsto (k'_1, k'_2)$ définit un changement de variables dont le jacobien est de valeur absolue égale à 1.

(c) Montrer, à l'aide du changement de variables défini ci-dessus, que

$$\mathrm{mes}\big(\mathcal{B}_\epsilon(\xi) \cap B(0,R)\big) := \int_{\mathcal{B}_\epsilon(\xi)\cap B(0,R)} \mathrm{d}k \leq C\epsilon$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de $\epsilon$.

(d) En déduire que $|\mu_n(\xi)| \leq \sqrt{\epsilon}\, H_n(\xi)$ où $\big(H_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(e) En exploitant l'hypothèse **(H2)**, obtenir une estimation de la forme

$$|\nu_n(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}||\xi||} F_n(\xi)$$

où $\big(F_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.
*[Indication : on pourra à nouveau utiliser le changement de variables défini par (b).]*

(f) En optimisant les inégalités précédentes par rapport à $\epsilon$, en conclure que la suite $\big(\rho_n\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $H^{1/2}$.

4. En déduire que l'ensemble $\big\{\rho_n,\ n \in \mathbf{N}\big\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

# VII Une propriété de compacité

*On utilise les mêmes notations et hypothèses que dans la partie VI mais on affaiblit l'hypothèse* **(H2)** *en la remplaçant par*

$$\textbf{(H2')} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \Big(\int_{\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2} |a(k).\nabla_x f_n(x,k)|^2 \,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}x\Big) = M_1 < \infty,$$

*où $a : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est une fonction mesurable donnée telle que pour tout $0 < R < \infty$ et tout $\xi \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$*

$$mes\Big(\big\{k \in B(0,R),\ a(k)\cdot\xi = 0\big\}\Big) = \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{\{a(k)\cdot\xi=0\}} \,\mathrm{d}k = 0.$$

*On rappelle que, pour $0 < R < \infty$, $B(0,R) = \{k \in \mathbf{R}^2,\ ||k|| \leq R\}$.*

1. On introduit une fonction $\chi : \mathbf{R} \to [0,1]$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que

$$\text{pour tout } s \in \mathbf{R},\ 0 \leq \chi(s) \leq 1, \quad \chi(s) = 1 \text{ si } |s| \leq 1, \quad \chi(s) = 0 \text{ si } |s| \geq 2,$$

et, de plus, $\chi$ est paire et monotone sur $[0, +\infty[$.

(a) Représenter graphiquement la fonction $\chi$.

(b) On note $\mathbf{S} = \{\zeta \in \mathbf{R}^2, ||\zeta|| = 1\}$. Soit $0 < \epsilon < \epsilon'$. On note

$$m_\epsilon : \zeta \in \mathbf{S} \longmapsto m_\epsilon(\zeta) = \int_{B(0,R)} \chi\Big(\frac{a(k)\cdot\zeta}{\epsilon}\Big) \,\mathrm{d}k.$$

Montrer que, pour tout $\zeta \in \mathbf{S}$, on a

$$\mathrm{mes}\Big(\big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\zeta| \leq \epsilon\big\}\Big) := \int_{B(0,R)} \mathbf{1}_{|a(k)\cdot\zeta|\leq\epsilon} \,\mathrm{d}k \leq m_\epsilon(\zeta) \leq m_{\epsilon'}(\zeta).$$

(c) Montrer que $(m_{\epsilon_n})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{S}$ lorsque $(\epsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0.

*[Indication : on pourra se servir de la question 3 de la partie I.]*

2. (a) En gardant les notations de la partie VI, établir que, pour $\xi \neq 0$ et $0 < \epsilon < 1$, on a

$$|\widehat{\rho}_n(\xi)| \leq \frac{1}{\epsilon||\xi||}\tilde{F}_n(\xi) + \tilde{H}_n(\xi)\sqrt{\mathrm{mes}\Big(\Big\{k \in B(0,R),\ |a(k)\cdot\frac{\xi}{||\xi||}| \leq \epsilon\Big\}\Big)}$$

où les suites $\left(\tilde{F}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\tilde{H}_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

(b) En déduire que

$$\lim_{A\to\infty}\left\{\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\int_{||\xi||\geq A}|\widehat{\rho}_n(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)\right\} = 0.$$

3. En s'inspirant de l'approche développée à la question V-5, en conclure que l'ensemble $\left\{\rho_n,\, n\in\mathbf{N}\right\}$ est relativement compact dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

# Bibliographie


[1] ABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J. Structure and interpretation of computer programs MIT PRESS

[2] AEBISCHER B L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique VUIBERT

[3] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[4] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[5] L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[6] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[7] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[8] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[9] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[10] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[11] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[12] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[13] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[14] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[15] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie
Tome I
Tome II ELLIPSES

[16] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[17] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[18] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[19] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[20] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[21] ARNOLD V. lectures on partial differential equations SPINGER SPINGER

[22] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[23] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[24] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[25] ALBERT L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[26] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[27] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[28] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[29] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[30] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[31] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[32] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[33] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[34] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[35] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I
Tome II ELLIPSES

[36] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[37] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[38] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[39] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[40] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[41] ARNOLD V. lectures on partial différentiel équations SPINGER SPINGER

[42] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[43] GUESSARIAN I. ARTIN E. Algèbre géométrique GAUTHIERVILLARS

[44] ARTIN E. Algèbre géométrique GABAY

[45] ARTINM. Algebra PRENTICE HALL PRENTICE HALL

[46] AUBIN J.P. Analyse fonctionnelle appliquée
Tome 1
Tome 2 PUF

[47] AUTEBERT J.M. Calculabilité et décidabilité MASSON

[48] AUTEBERT J.M. Théorie des langages et des automates MASSON

[49] AUDIN M. Géométrie de la licence à l'agrégation BELIN

[50] AVANISSIAN V. Initiation à l'analyse fonctionnelle PUF

[51] AVEZ A. Calcul différentiel MASSON

[52] BAASE S. VAN GELDER A. Computer algorithms Introduction to design & analysis ADDISON

[53] WESLEY BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A.

[54] SANTHAM., WEIL P., ZEITOUNM. Problèmes d'informatique fondamentale SPRINGER

[55] BACAER N. Histoires de mathématiques et de populations CASSINI

[56] BAJARD J.C. Exercices d'Algorithmique ITP

[57] BAKHVALOV N. Méthodes numériques MIR

[58] BARANGER J. Analyse numérique HERMANN

[59] BARBE Ph. LEDOUXM. Probabilité (De la licence à l'agrégation) BELIN

[60] BARRETM. BENIDIRM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD DUNOD

[61] BASILI B. PESKINE C. Algèbre DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES

[62] BASS J. Cours deMathématiques
Tome 1
Tome 2 MASSON

[63] BHATIA R. Matrix Analysis SPRINGER

[64] BAUER F. L. Decrypted secrets.Methods and maxims of cryptology SPRINGER

[65] BENDER C. ORSZAG S. Advanced mathematical methods for scientists and engineers MC GRAW HILL

[66] BENIDIRM. BARRETM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD

[67] BENOIST J. et Alii Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés PEARSON EDUCATION

[68] BENOIST J.SALINIER A. Exercices de calcul intégral Dunod

[69] BENZONI-GAVAGE S Calcul différentiel et équations différentielles DUNOD

[70] BERCU B. CHAFAI D. Modélisation stochastique et simulation DUNOD

[71] BERGER M. GOSTIAUX B. Géométrie différentielle ARMAND

[72] COLIN BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X. Problèmes de géométrie commentés et rédigés CÉDIC/NATHAN

[73] BERGER M. Géométrie Index
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères
3. Convexes et polytopes, olyèdres réguliers,aires et volumes
4. Formes quadratiques,quadriques et coniques
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères CÉDIC/NATHAN

[74] BERGER M. Géométrie tome 2 NATHAN

[75] BERGER M. Géométrie vivante CASSINI

[76] BERLINE N. SABBAH C. Groupes finis, journées X-UPS 2000 EDITIONS DE L'X

[77] BHATIA R. Matrix analysis 1 SPRINGER

[78] BICKEL P.J. DOKSUM K.A. Mathematical statistics PRENTICE HALL

[79] BIDEGARAY B. MOISAN L. Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation SPRINGER

[80] BIGGS NORMAN L. Discrete mathematics OXFORD SCIENCE

[81] PUBLICATIONS BLANCHARD A. Les corps non commutatifs PUF

[82] BILLINGSLEY P. Probability and measure COPYRIGHTED MATERIAL

[83] BOAS R. A primer of real functions MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

[84] BOISSONAT J.D. YVINEC M. Géométrie algébrique EDISCIENCE

[85] BON J.L. Fiabilité des systèmes MASSON

[86] BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C. PENNEQUIN D. Optimisation numérique SPRINGER

[87] BONY J.M Cours d'analyse Ecole polytechnique

[88] BONY J.M Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Ecole polytechnique

[89] BOUALEMH. BROUZET J.C. ELSNER B. KACZMAREK L. Mathématique L1 PEARSON EDUCATION

[90] BOURBAKI N. Éléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à X
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III
Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV HERMANN

[91] BOURGADE P. Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 CASSINI

[92] BOUVIER A. RICHARD D. Groupes HERMANN

[93] BREMAUD P Introduction aux probabilités SPRINGER

[94] BREZIS H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications MASSON

[95] BRIANE M. PAGES G. Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition VUIBERT

[96] BROUSSE P. Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. ARMAND

[97] COLIN BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J. Microcomputers and Mathematics CAMBRIDGE

[98] CABANE R. LEBOEUF C. Algèbre linéaire
1. Espaces vectoriels , Polynômes
2. Matrices et réduction ELLIPSES

[99] CABANNES H. Cours de Mécanique générale DUNOD

[100] CALAIS J. Éléments de théorie des anneaux PUF

[101] CALAIS J. Éléments de théorie des groupes PUF

[102] CANDELPERGHER B. Calcul intégral CASSINI

[103] CANDELPERGHER B Théorie des probabilités Calvage et Mounet

[104] CALDERO P. GERMONI J Histoires hédonistes de groupes et de géométries Calvage et Mounet

[105] CARREGA J.C. Théorie des corps HERMANN

[106] CARTAN H. Calcul différentiel (1971) HERMANN

[107] CARTAN H. Cours de calcul différentiel (1977) HERMANN

[108] CARTAN H. Formes différentielles HERMANN

[109] CARTAN H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques HERMANN

[110] CARTON O. Langages formels, calculabilité et complexité VUIBERT

[111] CASTLEMAN K.R. Digital image processing PRENTICE HALL

[112] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics I WILEY INTERSCIENCE

[113] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics II WILEY INTERSCIENCE

[114] CHABAT B. Introduction à l'analyse complexe MIR

[115] CHAMBERT-LOIR A. Algèbre corporelle EDITIONS DE L'X

[116] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V. Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) MASSON

[117] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. Exercices de mathématiques pour l'agrégation
Analyse 2
Analyse 3 MASSON

[118] CHARPENTIER E. NIKOLSKI N. Leçons de mathématiques d'aujourd'hui Vol 1 Vol 2 Vol 3 Vol 4 ELLIPSES

[119] CHARLES J. MBEKHTAM. QUEFFELEC H. Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs ELLIPSES

[120] CHATELIN F. Valeurs propres de matrices MASSON

[121] CHILDS L. A concrete introduction to Higher Algebra SPRINGER

[122] VERLAG CHOQUET G. Cours d'analyse Tome II : Topologie MASSON

[123] CHOQUET G. L'enseignement de la géométrie HERMANN

[124] CHOIMET D. QUEFFELEC H. Analyse mathématique CASSINI

[125] CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S. Algèbre 1 Algèbre 2 ELLIPSES

[126] CIARLET P.G. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation MASSON

[127] COGIS O. ROBERT C. Au-delà des ponts de Knisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes VUIBERT

[128] COHN P.M. Algebra Volume 1 JOHN WILEY

[129] COLLET H. GIRARD B. Mathématique BTS industriel NATHAN