Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
de la Formation Professionnelle
de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

RAPPORT DU CONCOURS D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES
SESSION : 2020

Sous la responsabilité du président du jury du concours :
Pr. Youssef OUKNINE

AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE SESSION 2020

Rapport du jury présenté par :

Professeur Ouknine Youssef : Président du jury

Université Cadi Ayyad

Faculté des Sciences Semlalia

e–mail: ouknine@uca.ma

Table des Matières

1 Composition du jury **5**

1.1 Directoire 5

1.2 Jury 5

1.2.1 Analyse et Probabilités 5

1.2.2 Algèbre et Géométrie 5

1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique 5

2 Introduction **7**

3 Déroulement du concours et statistiques **9**

3.1 Déroulement de la session 2020 9

3.2 Résultats généraux 11

4 Sommaires sur les notes obtenues **15**

4.1 Répartition des notes des épreuves écrites 15

4.1.1 Répartition des candidats admissibles selon le genre 15

4.1.2 Répartition des notes des épreuves écrites 15

4.2 Répartition des notes des épreuves orales 16

4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2016 à 2020 16

4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2016 à 2020 17

4.3 Evolution du nombre de candidats 17

5 Déroulement des épreuves orales **19**

5.1 Modalités pratiques 19

5.1.1 Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie 19

5.1.2 Oral 2 : Epreuve d'analyse et probabilités 20

5.1.3 Oral 3 : Epreuve de modélisation et calcul scientifique : 21

5.2 Remarques des commissions des épreuves orales 22

5.2.1 Remarques de la commission d'Algèbre et Géométrie 22

5.2.2 Remarques de la commission de Modélisation et Calcul Scientifique 23

5.2.3 Remarques de la commission d'Analyse et Probabilités 24

6 Listes des leçons **27**

6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie 27

6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités 29

6.3 Liste des leçons de modélisation et calcul scientifique 31

7 Textes de l'épreuve de modélisation **33**

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation 34

7.1.1 Introduction, l'image numérique 34

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique 35
7.1.3 Compression d'image numérique par SVD 35
7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD.... 36
7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques 38
7.1.6 Suggestions de développement 38
7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation 39
7.2.1 Le problème de Dirichlet 40
7.2.2 Méthodes numériques de résolution 41
7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE 42
7.2.4 Suggestions de développement 43
7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation 44
7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock 44
7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock 45
7.3.3 Quelques outils probabilistes 45
7.3.4 Outils informatiques.... 46
7.3.5 Suggestions de développement 47

8 Programme du concours de l'agrégation - Session 2020 49
8.1 Algèbre linéaire 49
8.1.1 Espaces vectoriels 49
8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie 49
8.2 Groupes.... 50
8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes 51
8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel 51
8.5 Géométrie affine et euclidienne 52
8.6 Analyse à une variable réelle 52
8.6.1 Nombres réels 52
8.6.2 Séries numériques 53
8.6.3 Fonctions définies sur une partie de R et à valeurs réelles 53
8.6.4 Fonctions usuelles.... 53
8.6.5 Intégration 53
8.6.6 Suites et séries de fonctions 53
8.6.7 Convexité 53
8.7 Analyse à une variable complexe 54
8.7.1 Séries entières 54
8.7.2 Fonctions d'une variable complexe.... 54
8.8 Topologie.... 54
8.8.1 Topologie et espaces métriques 54
8.8.2 Espaces vectoriels normés sur R ou C 54
8.8.3 Espaces de Hilbert 55
8.9 Calcul différentiel 55
8.9.1 Fonctions différentiables 55

8.9.2 Équations différentielles— 55
8.9.3 Géométrie différentielle 56
8.10 Calcul intégral 56
8.10.1 Notions de théorie de la mesure 56

8.10.2 Intégration 56
8.10.3 Analyse de Fourier 56
8.11 Probabilités 57
8.11.1 Définition d'un espace probabilisé 57
8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire 57
8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires 57
8.12 Distributions 57
8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$ 57
8.12.2 Applications 57
8.13 Méthodes numériques 58
8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires 58
8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles 58
8.13.3 Intégration numérique 58
8.13.4 Approximation de fonctions numériques 58
8.13.5 Transformée de Fourier 58

9 Annexe : Sujets du concours 59

9.1 Épreuve écrite de mathématiques générales 59
9.2 Épreuve écrite d'analyse et probabilités 70

Chapitre 1

Composition du jury

1.1 Directoire

Ouknine Youssef	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech
Ouassou Idir	Professeur de l'Enseignement Supérieur	Marrakech

1.2 Jury

1.2.1 Analyse et Probabilités

1. Bakhouch Brahim
2. Chaira Abdellatif
3. Erraoui Mohamed
4. Taibi Mimoune

1.2.2 Algèbre et Géométrie

1. Hajmi Said
2. Oukacha Diyer
3. Sadik Brahim
4. Zguiti Hassan

1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

1. Elkahoui M'hammed
2. Boujiada SADIK
3. Maarouf Hamid
4. Nasroallah Abdelaziz

Chapitre 2

Introduction

La session 2020 a été caractérisée par la crise sanitaire mondiale COVID-19. Les épreuves écrites d'admissibilité étaient prévues les 19 et 20 Mars 2020 mais les mesures de confinement imposées par la pandémie ont poussé au report des épreuves écrites selon le calendrier suivant :

- le 24 Juin 2020 pour l'épreuve de mathématiques générales,
- le 25 Juin 2020 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

La session 2020 du concours d'agrégation de mathématiques a été caractérisée par l'enrichissement du comité de Modélisation et calcul scientifique par un nouveau membre . Suite aux précédentes sessions, elle est ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume et aux candidats libres titulaires d'un Master da mathématiques ou équivalent. Elle entre aussi dans le cadre de la réforme de l'épreuve de Modélisation et Calcul Scientifique depuis l'année 2015. Ainsi l'année 2020 est considérée comme la sixième année de transition pendant laquelle nous avons fait cohabiter textes et leçons : Contrairement à leurs prédécesseurs, les candidats qui ont subi les épreuves orales du concours ont été confrontés à une nouvelle épreuve de modélisation qui comprenait deux éléments, à savoir le choix d'une leçon, dans la pure tradition du concours ou le choix d'un texte.

Au terme de la préparation, les candidats subissent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves de l'écrit, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants marocains.
Les épreuves sont ensuite envoyées en France pour correction. L'opération de déchiffrage des résultats se fait en France en présence du président du jury marocain. Une réunion du jury marocain est tenue à Rabat pour la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant le jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

Le nombre de postes offerts par le ministère pour la session 2020 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine a augmenté : 50 postes (contre 45 en 2019). Pour les inscrits au concours de la session 2020, une baisse a été enregistrée par rapport à l'année 2019 :

- le nombre de candidats inscrits était de 182 (contre 191 en 2019), ce qui correspond à une baisse d'environ 9 %

- le nombre de candidats ayant composé aux deux épreuves écrites d'agrégation était de 125,
- 64 candidats ont été déclarés admissibles (contre 65 en 2019) et leur moyenne était de 7,65/20 (contre 8,28/20 en 2019), le dernier admissible ayant 5/20 (contre 6,75/20 en 2019).
- 29 candidats (contre 23 en 2019) ont été déclarés admis et leur moyenne était de 10,50/20 (10,87/20 en 2019).

Le jury souligne qu'il y avait des candidats ingénieurs d'état parmi les candidats officiels des sessions 2017, 2018, 2019 et 2020. De même cette année il y a assez de candidats libres. Certains d'entre eux sont en première année de la formation C.R.M.E.F.

Ce rapport du jury se veut formatif, son objectif est d'aider les candidats à préparer les examens de la session 2021.
Nous espérons que les conseils apportés dans ce rapport permettront aux futurs candidats de se préparer comme il se doit à cette épreuve.

En ce qui concerne le déroulement du concours, je tiens à remercier vivement, pour le soutien moral et matériel :

1. L'ensemble de mes collègues membres du jury.
2. Le Centre National des Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation.
3. L'Unité Centrale de la Formation des Cadres.
4. La direction du C.R.M.E.F de Rabat.

Ces équipes n'ont épargné aucun effort pour la réussite et le bon déroulement de ce concours, notamment dans les conditions de confinement dû à la pandémie COVID-19.

Chapitre 3

Déroulement du concours et statistiques

3.1 Déroulement de la session 2020

Déroulement des épreuves écrites

Les épreuves écrites d'admissibilité étaient prévues les 19 et 20 Mars 2020. Les mesures de confinement de COVID-19 ont conduit au calendrier suivant :

- le 24 Juin 2020 pour l'épreuve de mathématiques générales (voir l'Annexe),
- le 25 Juin 2020 pour l'épreuve d'analyse et probabilités (voir l'Annexe),

Les délibérations pour l'admissibilité (pour tous les candidats français, marocains et tunisiens) ont eu lieu 23 Juillet 2020 sous la présidence du président du jury de l'agrégation externe de mathématiques française et des deux présidents de l'agrégation marociane et tunisienne. La liste d'admissibilité a été publiée le vendredi 24 Juillet 2020.
Rappelons que le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient le Maroc, la France et la Tunisie : les sujets d'écrit servent aussi pour l'admissibilité aux agrégations de mathématiques en France et en Tunisie ; **la barre d'admissibilité pour les étudiants du Maroc est au moins égale à celle de la barre fixée par le jury français.**

Les candidats admissibles ont reçu une convocation, indiquant les neuf jours, du dimanche 26 Juillet 2020 au mardi 28 Juillet 2020 et du mardi 4 Aout 2020 au dimanche 9 Aout 2020, de passage prévus pour leurs épreuves d'admission. Toutefois, pour connaître les horaires précis d'interrogation, il fallait se connecter sur le site sécurisé de l'agrégation de mathématiques, en indiquant son numéro de candidat : cette procédure permet de s'assurer de la volonté de participer aux épreuves. L'application a été fermée, comme les années passées, la veille du début des oraux. Les candidats qui n'avaient pas édité leurs horaires étaient, par défaut, invités à se présenter à 6h30 le premier jour de leur convocation sur les lieux du concours, sous peine d'être déclarés non présents. Cette procédure sera reconduite l'an prochain.

Le concours de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique) ou dans l'enseignement supérieur (grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau bac +3 ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Déroulement des épreuves orales

Les épeuves d'admission se sont déroulées du dimanche 26 Juillet 2020 au mardi 28 Juillet 2020 et du mardi 4 Aout 2020 au dimanche 9 Aout 2020. La liste d'admission a été publiée le lundi 10 Aout 2020. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Analyse et probabilités ;
- Algèbre et géométrie ;
- Modélisation et calcul scientifique

Samedi 25 Juillet 2020 à partir de 14h00 au CRMEF, Rabat

- Réunion d'accueil présidée par M. OUKNINE, président du jury ;
- Préparation des couplages et mise sous enveloppes ;
- Elaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
- Validation, par les candidats, du planning anonyme de passage par épreuve ;
- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats vers 16h 15 mn;
- Tirage au sort par les candidats des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 17h ;
- Inspection, par les membres du jury, de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôle des ouvrages apportés par les candidats à partir de 17h30 mn.

Remarque 3.1.1

- *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration la veille du commencement du concours, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*
- *la saisie des notes se fait au fur et à mesure du déroulement des épreuves.*

Du dimanche 26 Juillet 2020 au mardi 28 Juillet 2020 et du mardi 4 Aout 2020 au dimanche 9 Aout 2020: Déroulement des épreuves orales ;

Lundi 10 Aout 2020 de 09 h à 12 h : délibérations Lundi

10 Aout 2020 à 09 h : proclamation des résultats.

La réunion habituelle du jury avec les formateurs des C.R.E.M.F n'a pas eu lieu à cause de la pandémie.

3.2 Résultats généraux

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	182
Postes mis au concours	50
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	125
Candidats eliminés	0
Candidats admissibles	64
Candidats admis	29

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2020

Candidats admis :

Liste des candidats admis par ordre alphabétique et la liste des candidats admis et proposés par le jury pour effectuer un stage probatoire en CPGE.

Résultat du concours national de l'agrégation de mathématiques Session 2020
Liste des admis par ordre alphabétique

N°	Nom	Prènom	Décision finale du jury
1	ADRAT	HAMZA	Admis
2	AGHZER	ISSAM	Admis
3	ARRAJI	AYOUB	Admis
4	BAHMANE	FAISSAL	Admis
5	BOUKHRI	ISSAM	Admis
6	BOURASS	ACHRAF	Admis
7	BOURZIK	CHARIF	Admis
8	CHADAD	OMAR	Admis
9	EL BAKILI	DRISS	Admis
10	EL HOUMAIDI	YOUNESS	Admis
11	EL KADIOUI	YOUNESS	Admis
12	EL MOURABIT	ABDELGHAFOUR	Admis
13	ELFATHI	IZDDIN	Admis
14	EZZINE	AYOUB	Admis
15	HASNAOUI	ABDELHAK	Admis
16	HDACH	YASSINE	Admis
17	ID HAISSOUNE	MOHAMED	Admis
18	IDRISSI	ABDELATIF	Admis
19	IJJOUK	MALIKA	Admis
20	JAWAD	ABDESSAMAD	Admis
21	KABBOUCH	OUSSAMA	Admis
22	NAOUM	KHAWLA	Admis
23	SABIRI	BRAHIM	Admis
24	SOUHMANE	SALAH EDDINE	Admis
25	STAILI	YASSIN	Admis
26	STAILI	LAHOUCINE	Admis
27	TAOUFIK	SAFOUANE	Admis
28	ZAHIR	ALAEDDINE	Admis
29	ZAIDNI	AZEDDINE	Admis

Nombre total de candidats déclarés admis : Vingt neuf (29)

Résultat du concours national
de l'agrégation de mathématiques
Session 2020

Candidats admis et proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE

Ordre	Nom	Prénoms	Décision du jury
1	ELFATHI	IZDDIN	**Admis**
2	STAILI	YASSIN	**Admis**
3	SOUHMANE	SALAH EDDINE	**Admis**
4	HDACH	YASSINE	**Admis**
5	BOURASS	ACHRAF	**Admis**
6	ZAIDNI	AZEDDINE	**Admis**
7	IJJOUK	MALIKA	**Admis**
8	HASNAOUI	ABDELHAK	**Admis**
9	EL KADIOUI	YOUNESS	**Admis**
10	SABIRI	BRAHIM	**Admis**
11	KABBOUCH	OUSSAMA	**Admis**

Candidats proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE : Onze (11)

Chapitre 4

Sommaires sur les notes obtenues

4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AP : Analyse et Probabilités
- MG : Mathématiques générales

4.1.1 Répartition des candidats admissibles selon le genre

Parmi les candidats admissibles on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	5	7,81%
Hommes	59	92,19%

Répartition des admissibles selon le genre

4.1.2 Répartition des notes des épreuves écrites

Le jury de l'agrégation de mathématiques avait fixé la barre d'admissibilité à 40/160.
On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Mathématiques générales (note sur 20)	2,25	15	6,87	2,77	6,62
Analyse et probabilités (note sur 20)	3	16	8,42	2,93	8,46
Total écrit (note sur 40)	10	27,25	15,36	4,56	14

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

4.2 Répartition des notes des épreuves orales

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilités
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

On présente ci-dessous les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale.

Epreuve	Minimum	Maximum	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	16	58	34,90	12,54	34
Analyse et probabilités (notes sur 80)	20	62	41,06	9,97	41
Modélisation et calcul scientifique (/80)	13	61	34,88	13,18	34
Total oral (note sur 240)	53	178	110,84	28,87	

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2016 à 2020

Effectifs détaillés des candidats aux épreuves écrites de 2016 à 2020

Année	2016		2017		2018		2019		2020	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Inscrits	60	60	117	117	170	170	191	191	182	182
Présents	47	47	65	65	107	107	128	128	125	125
Absents	13	13	52	52	63	63	63	63	57	57
Note moyenne sur 20	9,82	8,79	5,47	6,50	6,8	7,64	6,5	7	6,88	8,42

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2016		2017		2018		2019		2020	
Nombre d'admis	25		43		70		65		64	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Moyenne sur 20	7,37	7,73	9,82	8,79	7,28	8,14	6,8	7,64	6,88	8,42

La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2016	2017	2018	2019	2020
Admissibles	25	43	70	65	64
Moyenne des épreuves sur 20	8,30	7,71	7,22	7,55	7,65

4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2016 à 2020

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :

Année	2016			2017			2018			2019			2020		
Epreuve	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP
Présents	15	25	25	25	43	43	43	63	63	63	61	61	61	60	59
Moyenne	35,8	47,44	44,4	31,4	40,87	34,10	31,4	44,49	35,16	34,73	35,55	39,95	34,68	35,59	41,19

La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Admissibles	16	25	38	63	65	64
Moyenne des épreuves sur 80	41,15	41,08	35,45	38,126	36,80	37,15

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admis est comme suit :

Année	2016			2017			2018			2019			2020		
Nombre d'admis	17			15			20			23			29		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Moyenne sur 80	53,12	51,65	37	53,07	49,27	40,07	56,2	42,8	49,3	46,17	47,74	50,30	44,48	46,14	45,69

La moyenne générale des candidats admis est comme suit :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Admis	07	09	17	15	20	23	29
Moyenne des épreuves sur 80	45,09	46,81	44,29	47,47	42,72	43,48	45,44

4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admissibles	Nombre de Candidats Admis
1988	8	7	3
1989	17	17	10
1990	29	23	16
1991	28	27	21
1992	27	27	24
1993	24	22	19
1994	24	22	19
1995	32	24	20
1996	36	22	20
1997	22	15	15
1998	28	11	11
1999	34	20	18
2000	37	14	13
2001	44	21	16
2002	38	22	16
2003	37	28	18
2004	34	28	14
2005	25	20	11
2006	38	15	08
2007	55	11	08
2008	64	25	16
2009	39	17	13
2010	28	03	02
2011	35	13	04
2012	77	15	06
2013	63	20	11
2014	61	14	07
2015	93	16	09
2016	47	25	17
2017	63	43	15
2018	107	70	20
2019	191	65	23
2020	182	64	29

Chapitre 5

Déroulement des épreuves orales

Le rapport qui suit, précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats ; ainsi que les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise aux épreuves orales.

5.1 Modalités pratiques

5.1.1 Oral 1: Epreuve d'algèbre et géométrie

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat dispose des livres de la bibliothèque de l'agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à tout autre objet électronique.
Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et
- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury fait procéder à la photocopie des plans préparés par les candidats. Ces derniers sont manuscrits, comportent 3 pages $A4$ au maximum et possèdent une marge de $1cm$ sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est conseillé de ne pas utiliser de stylos de couleurs. Il est en revanche conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc. pour qu'il soit le plus lisible possible. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation.
L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ : une présentation du plan éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (6 minutes maximum) pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré : il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux, cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite ses résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements en égard au niveau du candidat. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre son niveau intrinsèque et les développements proposés. Il faut veiller à rester au niveau de l'Agrégation. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement.

Troisième partie : questions et dialogue

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise approfondie du plan presenté. C'est à dire qu'une part importante de la discussion portera sur le plan, ou trouvera sa source dans le plan présenté par le candidat. Il est essentiel que le candidat maîtrise ce qu'il propose. Il doit s'attendre à ce que le jury lui pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon. Le but est de voir le candidat dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique : faire une analyse de l'exercice, établir des liens avec les résultats connus (qui peuvent être ceux du plan), proposer des calculs et raisonnements pouvant conduire à la solution de la question posée. La qualité du dialogue, les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

5.1.2 Oral 2 : Epreuve d'analyse et probabilités :

Les modalités pratiques sont les mêmes que celles de l'oral d'Algèbre et Géométrie.
Les probabilités et les statistiques sont utilisées ensemble dans de nombreuses applications où l'imprévu et le hasard dominent. Les probabilités sont très utiles dans les mécanismes décisionnels en univers incertain. Avec l'informatique, des simulations aléatoires peuvent être réalisées afin d'aider à la prise de décision dans de nombreux cas, comme l'évaluation des risques financiers (risques sur les marchés pour les banques), à fixer les prix de produits financiers et des primes de contrats d'assurance, compte tenu des nombreux risques ayant pour origine le marché ou le client

(secteur d'assurances), les mesures d'audience des médias par des instituts de sondage, les prévisions d'appel sur téléphone portable pour optimiser le déploiement du réseau et les études de sûreté de fonctionnement.
Aussi depuis les années 1980, les banques ont fait recours aux mathématiciens et la tendance de recrutement est plus récente au niveau des assurances. Les compétences exigées couvrent les mathématiques appliquées aux finances et à l'assurance (statistique, probabilités et actuariat). Le marché dans ce secteur est très prometeur.
Tenant compte de ces tendances observées sur le marché de l'emploi, la plupart des grandes écoles d'ingénieurs, ont creé des filières d'ingénierie financière pour former des compétences nécessaires afin de comprendre et maîtriser la complexité des marchés financiers.

5.1.3 Oral 3 : Epreuve de modélisation et calcul scientifique :

Le candidat choisit entre un texte et une leçon. Il dispose de 4 heures de préparation, pendant lesquelles il dispose des ouvrages de la bibliothèque de l'agrégation. Le candidat peut disposer de ses propres livres sous les deux conditions citées dans le paragraphe 5.1.1.

Le jury souhaite rappeler ce qu'il attend des candidats dans cette épreuve.
Les textes sont surmontés du bandeau suivant:

- Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.

  Les textes se terminent par le bandeau suivant :

- Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.

L'interrogation dure 1 heure et quart, pendant laquelle le candidat gère comme il le désire le tableau et les illustrations informatiques qu'il entend présenter. Le candidat doit préparer un exposé d'environ 40 minutes, les 20 minutes restantes étant occupées par les questions du jury.
Le texte est court, environ 5 pages, motivé par un problème concret. Il peut présenter des arguments rapides, voire heuristiques (signalés comme tels). Il ne contient pas d'assertion délibérément trompeuse et se conclut par une liste de suggestions. Le candidat dispose pendant sa préparation

et l'interrogation d'un ordinateur muni des logiciels suivants : Scilab et Python. Les supports informatiques (USB, par exemple) utilisés au cours de l'épreuve sont fournis par le jury et identifiés de manière explicite pour chaque candidat. Il est interdit d'introduire tout autre support informatique comme par exemple des clés usb personnelles. Une imprimante sera mise à disposition des candidats dans la salle de préparation.
Dans cette épreuve, le candidat est appelé à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester ses qualités pédagogiques et de synthèse. Le texte fourni est un point de départ pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème concret en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions et mise en lumière de connaissances. Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. En début d'épreuve, il est demandé au candidat d'annoncer le plan qui va structurer sa présentation. Répondre à cette requête ne peut s'improviser et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation.
La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer. À un survol superficiel de l'intégralité du texte sans

apport mathématique ou critique scientifique, le candidat doit préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâttie sur des arguments mathématiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi.
La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant.

5.2 Remarques des commissions des épreuves orales

5.2.1 Remarques de la commission d'Algèbre et Géométrie

Comme auparavant, l'épreuve orale d'algébre et géométrie s'est organisée en trois temps.

1. Le premier volet de l'épreuve est consacré à la présentation du plan de la leçon que le candidat a choisie. Elle doit durer 10 minutes au maximum. Ce délai est en général respecté par la majorité des candidats.
   Le jury a relevé une amélioration dans l'élaboration des plans. Cependant il y a encore une carence en ce qui concerne les exemples et les applications (surtout ceux et celles tirés de la géométrie) et des aspects algorithmiques.

2. La deuxième phase de l'épreuve est réservée au développement. Elle doit durer 20 minutes au maximum. Le candidat est sensé proposer au minimum deux développements.
   Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, auquel cas il y'a eu un dépassement des 20 minutes accordées. Le Jury est amené à demander au candidat de

conclure, ce qui pénalise la note réservée à ce volet.

3. La troisième phase est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au Jury l'occasion de
   (a) S'assurer de la bonne maîtrise de la démonstration du thème que le candidat vient de développer et de discuter de son adéquation avec la leçon.
   (b) Tester l'appropriation par le candidat de toutes les notions présentées dans son plan. Le jury a noté que certains candidats ont proposé des plans qui dépassent largement la compétence et le niveau maîtrisé.
   (c) Proposer des exercices en relation directe avec la leçon.
   Sur ce point le Jury a noté que certains candidats ont pu développer des thèmes forts et ont montré une maîtrise remarquable de leur exposé.

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale, la commission souligne les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats a tendance à choisir des sujets d'algébre linéaire au détriment des sujets portant sur les structures d'anneaux et de corps ou sur la géométrie affine et euclidienne.
2. Certains candidats proposent deux développement au jury dont l'un d'eux manque de consistance. Le candidat doit savoir que ce n'est pas toujours le thème le plus intéressant qui lui sera proposé de développer.
3. Quelques candidats ont trouvé une grande difficulté pour présenter une leçon dans les normes de l'épreuve orale d'algébre et géométrie.
4. Le jury incite à porter plus d'efforts pour combler le manque remarquable dans les notions de géométrie et leurs applications.

5.2.2 Remarques de la commission de Modélisation et Calcul Scientifique

L'épreuve d'oral de modélisation est préparée par le candidat en 4 et elle dure 1. Le candidat a le choix entre un texte et une leçon. Le couplge texte/leçon est fait de sorte que le candidat ait le choix entre deux thèmes assez éloignés.

1. Le candidat a 10 mn pour présenter son plan, devant le jury, en y précisant les points qu'il propose comme développements éventuels. Il est vivement souhaitable que le candidat propose au moins deux développements. Le délai de 10 mn est en général respecté par la majorité des candidats. La grande majorité des candidats choisit le texte. Le jury a toutefois relevé que certains candidats manquent de rigueur et de clarté dans les plans qu'ils présentent. Il a aussi constaté que la tendance générale est de présenter un seul développement.
2. Une fois un développement proposé par le candidat a été choisi par le jury, le candidat a 20 mn pour l'exposer, et il a le droit de ne pas être interrompu durant les 20 mn de son exposé.

Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, auquel cas il y a un dépassement des 20 minutes accordées. Le Jury est amené à demander au candidat de conclure, ce qui pénalise la note réservée à ce volet.

3. Une spécificité importante de l'épreuve de modélisation est que le candidat est tenu de présenter un développement informatique en relation avec le texte ou la leçon choisi.

4. La troisième phase de l'épreuve est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au Jury l'occasion de

   (a) s'assurer de la bonne maîtrise du thème que le candidat a proposé comme développement et de discuter de son lien avec le texte, ou la leçon, choisi,

   (b) tester à quel point le candidat maitrise les concepts présentées dans son plan,

   (c) poser des questions en relation directe avec le texte ou la leçon choisi par le candidat. Ces questions concernent aussi les éventuels développements informatiques présentés par le candidat.

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale de modélisation, la commission soulève les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats ne propose aucun développement informatique et se contente de proposer un développement théorique.

2. Certains candidats proposent un seul développement au jury. Dans le cas où ils en proposent deux, l'un des deux sujets manque de consistance.

5.2.3 Remarques de la commission d'Analyse et Probabilités

L'épreuve d'analyse et Probabilités se compose d'un exposé du candidat suivi d'un entretien avec le jury. L'exposé du candidat, au cours duquel il est conduit à présenter le plan de la leçon et un développement :

I. Plan (dix minutes maximum) :

Le candidat expose une synthèse, en argumentant la construction du plan, de la leçon à savoir :

1. L'intérêt et le positionnement de la leçon dans son environnement mathématique.

2. Le contenu de la leçon.

3. L'encha ̂ınement des paragraphes.

4. Les résultats et les difficultés.

5. L'illustration avec des exemples pour mettre en évidence les hypothèses et les résultats.

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est sollicité à présenter un plan cohérent et compréhensible.

II. Le développement (vingt minutes maximum) :

Le candidat devra proposer au moins deux développements et qu'il soit en mesure de les exposer en détail. Pour mener à bien le développement choisi par le jury, le candidat devra respecter le temps accordé au développement et donner des explications sur l'approche adoptée, les difficultés et l'utilisation des notions développées.

Dans cette étape de l'épreuve, le candidat devra être capable de mettre en lumière ses qualités pédagogiques et techniques et doit aussi faire preuve de la compréhension du sujet.

III. L'entretien avec le jury (quarante minutes maximum) :

L'entretien doit permettre au jury de :

1. Confirmer la maîtrise du candidat du plan présenté et des outils de bases utilisés dans le développement.

2. Vérifier la capacité du candidat à faire preuve de réflexion dans des situations parfois inattendues.

3. Constater que le candidat a acquis un certain recul. Résultat naturel d'un travail de préparation approfondi au concours d'agrégation.

Dans cette dernière étape de l'épreuve, le candidat doit donc se préparer à des questions sur tout énoncé mis dans son plan ainsi qu' à des questions sur des applications de son développement. Questions auxquelles il doit répondre avec précision. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier du résultat général présenté dans son développement. Pour cela il doit mettre en oeuvre des énoncés sur des situations simples et aussi réfléchir à des exemples ou des contre-exemples lors de sa préparation.

Dans son évaluation, le jury a noté les remarques suivantes :

1. Une progression constatée du niveau des candidats.
2. Plusieurs candidats se sont contentés de réciter d'une maniére linéaire leurs plans.
3. Des réponses non précises furent formulées à des questions élémentaires.
4. Des notions de bases à titre d'exemple, la dérivation sous le signe somme et en général de la dérivation de fonctions composées, sont un peu ou mal maîtrisées. Certains candidats manipulent des objets mathématiques dont ils ignorent les définitions. En résumé le programme de la licence n'est pas bien assimilé par certains candidats.

En conclusion, il est souhaitable que le candidat connaisse le programme du concours d'agrégation et non se cantonner au programme de la deuxième année post-bac.

Chapitre 6

Listes des leçons

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation des leçons figurant sur les listes. Une grande partie de ces leçons seront reprises pour la session 2020, des modifications et des évolutions sont possibles. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Sous-groupes distingués et de groupes quotients. Exemples et applications.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
8. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
9. Représentations de groupes finis de petit cardinal.
10. Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de fourier discrète. Applications.
11. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Applications.
12. Nombres premiers. Applications.
13. Anneaux principaux. Applications.
14. Corps finis. Applications.

15. Anneau des séries formelles. Applications.
16. Extensions de corps. Exemples et applications.
17. Exemples d'équations diophantiennes.
18. Droite projective et birapport.
19. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
20. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
21. Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
22. Résultant. Applications.
23. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Localisation des racines dans les cas réel et complexe.
24. Actions de groupes sur les espaces de matrices. Exemples et applications.
25. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
26. Déterminant. Exemples et applications.
27. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
28. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
29. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
30. Exponentielle de matrices. Applications.
31. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
32. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
33. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.
34. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
35. Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.
36. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
37. Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.
38. Coniques. Applications.

39. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
40. Applications des nombres complexes à la géométrie. Homographies
41. Utilisation des groupes en géométrie.
42. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
43. Etude métrique des courbes planes ou gauches.
44. Groupes abéliens finis.
45. Sous-groupes finis de $O^+(2)$ et $O^+(3)$.
46. Matrices équivalentes et semblables.
47. Résolution d'un système d'équations linéaires. Algorithmes et complexité.
48. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Applications.
49. Groupes quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.
50. Espaces vectoriels quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.

6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.
7. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
8. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
9. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
10. Approximation d'une fonction par des polynomes et des polynômes trigonometriques. Exemples et applications.
11. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
12. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Exemples et applications
13. Étude métrique des courbes. Exemples.

14. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples
15. Applications des formules de TAYLOR.
16. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
17. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
18. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
19. Exemple d'équations aux dérivées partielles linéaires.
20. Convergence des suites numériques. Exemples et applications des suites numériques.
21. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
22. Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.
23. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
24. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
25. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
26. Fonctions à variations bornées et mésure de Stieljes, Exemples et applications.
27. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
28. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
29. Espaces L^p ,$1 \leq p \leq +\infty$.
30. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
31. Illustrer, par des exemples, quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou de plusieurs variables réelles.
32. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
33. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
34. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
35. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
36. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
37. Séries de FOURIER. Exemples et applications.

38. Exemples de problèmes d'interversion de limites.

39. Suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

40. Loi binomiale. Loi de POISSON. Applications.

41. Vecteurs aléatoires et indépendance.

42. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.

43. Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

44. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.

45. Fonctions de répartitions. Proriétés et applications.

46. Fonctions caractéristiques. Proriétés et applications.

47. Fonction caractéristique et transformée de Laplace d'une variable aléatoire. Exemples

48. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence en loi, convergence en probabilité et convergence presque sûr).

49. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

50. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

51. Utilisation de la notion de convexité en analyse.

52. Espaces de SCHWARTZS ($\mathbb{R}^d$) et distributions tempérées. Transformation de FOURIER dans $S(\mathbb{R}^d)$ et $S^0(\mathbb{R}^d)$.

53. Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

6.3 Liste des leçons de modélisation et calcul scientifique

1. Calcul numérique : intégration, différentiation, sommation, résolution d'équations algébriques ou différentielles.

2. Méthodes numériques pour les systèmes linéaires : conditionnement, factorisation LU, méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires sans contraintes.

3. Résolution de systèmes d'équations non linéaires : Méthode de Newton, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.

4. Equations différentielles ordinaires : Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre.

5. Probabilités : lois de variables aléatoires discrètes et à densité. Méthodes de simulation de variables aléatoires de lois données, en particulier pour les lois classiques : binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, gaussienne, gamma.

6. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états fini : irréductibilité, apériodicité, classification des états, théorème de Perron-Frobenius, convergence.

7. Calcul matriciel : opérations élémentaires sur lignes et sur colonnes, méthode du pivot de Gauss.

8. Polynômes à une indéterminée : évaluation (Horner), interpolation (Lagrange), localisation des racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

Chapitre 7

Textes de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées
- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.
- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modèlisation mis en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris
2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié
3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon
4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)
5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.
- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n} \times c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p} .$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers (i, j). Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0, 255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple

(RGB= red, green, blue).

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice M carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où n_k est le nombre de pixels d'intensité k (i.e. de termes de M valant k). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des (i, j) où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image M. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec M carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$.
Comprimer une image M consiste à la remplacer par une autre image M' proche de M - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle A de taille n, p, il existe des matrices orthogonales U, V_t et une matrice D de taille n, p telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec U, V unitaires et D respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les k derniers sont 0 cela signifie que le rang de A est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où D' est obtenue en remplaçant dans D les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de M. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si M est d'ordre

512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M^J = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4 \times 256^2 + 256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle\cdot|\cdot\rangle_n$ et $\langle\cdot|\cdot\rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$. On notera $(E_i)_{1\leq i\leq p}$ la base canonique de $\mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1\leq j\leq n}$ celle de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n pour la matrice nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Ker A désigne est le noyau de A, Im A l'image de A. Le noyau de A est $\{X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, noté Ker A, l'image de A est $\{AX \mid X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$, notée Im A. On note $F^\perp$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

I.1. Montrer que ${}^tAA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.
I.2. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
I.1.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X|Y\rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\|AW\|_n^2$ en fonction de λ et $\|W\|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont réelles, positives ou nulles.

I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices ${}^{t}AA$ et $A^{t}A$ ont même rang.

I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A^{t}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{t}AA$.

I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^tAA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \dots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \dots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \dots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \dots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \dots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^tA$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^tA$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{r + 1, \dots, p\}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, ${}^tAU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{r + 1, \dots, n\}$, ${}^tAU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^tA$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^tUAV)_{i,j}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^tUAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\},\ ({}^tUAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \quad \text{où} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^tV$.
La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \sum_{i=1} V_i{}^tE_i$.

b) En déduire : $A = \sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^tV_i$, ${}^tAA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^tV_i$, $A{}^tA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^tU_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $Ker\ A$, $Ker\ {}^tA$, $Im\ A$, $Im\ {}^tA$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^tA = \operatorname{Ker} {}^tA$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^tV$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \dots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \dots, \frac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^tU$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.
2. Déterminer $(A_0^+)^+$.
3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.
4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiqu

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ...) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :
En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdimage.jpg') fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

```
z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
```

On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de A^+, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de A. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.

- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.

- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.

- Que donne la SVD de A si A est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intérêt de modèles numériques pour les images?

- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.

- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.

- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image I en une image I^J pratiquement similaire à I mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).

- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont

- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point M intérieur au solide la température en M est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en M (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit G un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière et soit ϕ une fonction continue de ∂G dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue f de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(a) $\forall x \in G, \ \forall r \in]0, dist(x, \partial G)[, \ f(x) = \int_{|y|\leq r} f(x+y)dy$

(b) $\forall x \in \partial G, \ f(x) = \phi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP où intervient le laplacien de f, $\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

Theorem 7.2.1 *Une fonction f est solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord h si et seulement si elle est de classe C^2 sur G, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine G et sa frontière, l'existence ou l'unicité de f, solution du problème de Dirichlet $\begin{matrix}(c)\\(b)\end{matrix}$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier où existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

Theorem 7.2.2 *Le problème de Dirichlet sur la boule $B(0,r)$ avec condition au bord ϕ est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \phi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz)$$

où m_r est la mesure uniforme sur la sphère $S(0,r) = \partial[B(0,r)]$ de masse μ_r choisie pour avoir $\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz) = 1.$

La valeur de la solution en x est une moyenne des valeurs de h relativement à une probabilité dépendant de x portée par la sphère $S(0, r)$. La fonction densité $z \mapsto \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z - x\|^d}$ est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine G non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de G est ici la loi de Cauchy translatée en x.

7.2.2 Méthodes numériques de résolution

Déterministe

On discrétise l'espace, notant $h > 0$ le pas de discrétisation, notant $\sim_h$ la relation de voisinage :

$$\forall (x, y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$ et $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \ \exists\, y \in G_h, \ x \sim_h y\}$.
Le laplacien discret est donné par $\Delta_h f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$.

Remarquer que $\Delta_h f(x) = 0$ équivaut à $f(x) =$ moyenne uniforme de f sur le voisinage de x, ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.
Le problème de Dirichlet sur G avec condition au bord ϕ est remplacé par sa version discrète :
chercher f_h définie sur $G_h \cup \partial_h G$ telle que $\begin{array}{l} (1) \forall x \in G_h, \quad \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, \ f(x) = \phi_h(x) \end{array}$

avec $\phi_h(x)$ = valeur moyenne de ϕ sur $\partial_h G \cap [x - h, x + h]^d$.
Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, $n = card(G_h)$. On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice $n \times n$ du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.
La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque h tend vers 0^+.

Stochastique

On utilise ici le processus W, mouvement brownien d– dimesionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur -1/2 près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord ϕ est donnée par

$$(3) \quad f(x) = \mathbb{E}(\phi(X(\tau_G)))$$

où $X(t) = x + W(t)$ et $\tau_G = \min\{t \geq 0, \ X(t) \in \partial G\}$ (le temps d'atteinte de la frontière ∂G.
Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire X_h partant de $x \in G_h$ (qui remplace le processus $X(t) = x + W(t)$ évoqué plus

- on considère $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que

$$\forall\,(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)\in\{-1,+1\}^d\ ,\quad \mathbb{P}(Y_j=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_d)=\frac{1}{2d}$$

- on pose, pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $X_h(k)=x+\sum_{j=1}^{k}Y_j$.

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.
La fonction $x\mapsto\mathbb{E}(\phi(X_h(\tau_{G_h})))$ où $\tau_{G_h}=\min\{k\geq 0,\ \ X(t)\in\partial G_h\}$ est une solution approchée du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord ϕ, elle converge vers la solution f donnée par (3) lorsque h tend vers 0^+.
Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes Y_j qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrête la marche aléatoire X_h dès qu'elle atteint la frontière de G. Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$.
- $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
- On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur louvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l' application $\Delta u=\partial_{1,1}u+\partial_{2,2}u$.
- Une application $v\ :\ \Omega\to R$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω avec $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- Pour $(x,y)\in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z=x+iy$ et on pose pour t réel

$$N(x,y,t)=\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2}=\frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos(t))^2+(y-\sin(t))^2}\qquad\text{(quand l'expression a un sens)}$$

Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f:C(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$. Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$. On définit en outre l'application

$$N_f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(x,y,t)f(\cos(t),\sin(t))\,dt$$

sur $D(0,1)$ et l'application $u(x,y) = \begin{cases} N_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$ sur $\bar{D}(0,1)$.

1. a. Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{1,1}N_f$ dordre 2 par rapport à x.
   De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles dordre 2 par rapport a toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite. Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{i,j}N_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{i,j}N(x,y,t)$.

   b. En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

2. On fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi] / \|(\cos(t),\sin(t)) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

   a. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.

   b. Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   c. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x,y,t)| \leq 4\,\frac{1-(x^2+y^2)}{\delta^2}$$

   d. En déduire que, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Conclusion?

4. (résumée) Montrer que si f est nulle sur $C(0,1)$ alors u est nulle sur $D(0,1)$. Conclusion?

7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.
Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.

Pour l'utilisation de processus X comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété $(f(X_t))_t$ est une martingale et la propriété f harmonique.
La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine G. Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque sûrement. Comment prouver ces assertions?
Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut être utilisé.

Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas où le solide possède des sources de chaleur internes?
La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent être efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?
Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.
Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.
Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des n prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne $\lambda = 0.1$ mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que cette loi, notée $(d(k))_{k\in E}$, est donnée par $d(1) = d(4) = 1/6$ et $d(2) = d(3) = 1/3$. Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau I de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande Z articles, elle encourt un coût $C = K + iZ$, où $K = 32\$$ est le coût d'installation et $i = 3\$$ est le coût incrémental par article commandé (si $Z = 0$, aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le

temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.
L'entreprise adopte une stratérie, notée (s, S), pour alimenter son stock et décide une commande Z selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si } I < s \\ 0 & \text{si } I \geq s \end{cases}$$

où $(s, S) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $s < S$.

Lorsqu'une demande D est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock I est supérieur ou égal à D (i.e. $I \geq D$). Si la demande D excède le niveau du stock I (i.e. $I < D$), l'excès $\Delta = D - I$ est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où $\Delta > 0$, le niveau du stock I devient théoriquement négatif ($I = -\Delta$). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.
Soit $I(t)$ le niveau du stock à l'instant t. Notons $I^+(t)$ et $I^-(t)$ les quantités $\max(I(t), 0)$ et $= \max(-I(t), 0)$ respectivement. Pour une période de n mois ($n \in \mathbb{N}^*$), considérons les quantités $A^+(n)$ et $A^-(n)$ définies par

$$A^+(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^+(t)dt \qquad \text{et} \qquad A^-(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^-(t)dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté m et un coût de l'arriérée noté a. Le coût $m = 1\$$, par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent, $a = 5\$$ par article manquant par mois.

7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que $I(0) = 60$.
On simule le comportement du stock pour $n = 120$ mois et on compare le coût total moyen par mois CTM (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table **(Table 1.)** suivante:

s	20	20	20	20	40	40	40	60	60
S	40	60	80	100	60	80	100	80	100

Table 1. Différentes stratégies (s, S)

7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

Définition

La densité de probabilité f d'une variable aléatoire réelle X qui obéit à une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notation: $X \sim Exp(\alpha)$) est définie par

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x), \quad x \in I\!R,$$

où la notation $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.
La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in I\!R$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. La variable aléatoire réelle Y définie par $Y = F(X)$ obéit à une loi de probabilité uniforme sur $]0,1[$.

Inverse généralisé de F

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. La fonction inverse généralisée F^- de F est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in I\!R / F(x) \geq u\}, \qquad u \in]0,1[$$

Remarque

Si F est inversible, alors $F^- = F^{-1}$.

Exemples

1)− Pour une variable aléatoire exponentielle $X \sim Exp(\alpha)$, nous avons

$$F^-(u) = F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-u)}{\alpha}, \qquad u \in]0,1[\tag{7.3.2}$$

2)− Pour une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = I\!P(X = x_k),\ k = 1, 2, \ldots$, nous avons, pour une réalisation uniforme $u \in]0,1[$,

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors} \quad F^-(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^-(u) = x_k & \text{telle que} \quad \sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \end{cases}$$

7.3.4 Outils informatiques

La simulation Monte Carlo, d'un modèle aléatoire, utilise une suite $u_k,\ k = 1, 2, \cdots$, de réalisations de la loi uniforme sur $]0,1[$. On **admet** qu'une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d'une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l'appel de la fonction *rand*() donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive $RAND\_MAX$, d'où la division $u = (float)rand()/RAND\_MAX$ donne un réel $u \in]0,1[$ que l'on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$. Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

7.3.5 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

1)– Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe **"Quelques outils probabilistes"**.

2)– Déterminer le lien entre le paramètre λ défini dans la section I et le paramètre α défini dans la section III.

3)– Soit $t > 0$. Exprimer $I^+(t)$ en fonction des instants $t_k \in [0, t]$ et des demandes D_k formulées aux instants t_k.

4)– Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^+(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} A^-(n).$$

5)– Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l'importance du support de cette loi.

Aspect enseignement

1)– Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.

2)– Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?

3)– Discuter la possibilité de passer la commandea à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1)– Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).

2)– Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.

3)– Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation

x de X dont la fonction de répartition est F :

Etape 1: générer u uniforme dans $]0, 1[$ (par un générateur de nombres aléatoires)
Etape 2: prendre $x = F^{-}(u)$

4)– Pour une stratégie $(s, S) = (30, 90)$, proposer une réalisation possible de $\boldsymbol{I}(t)$, durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de $I(t)$, $I^{+}(t)$ et $I^{-}(t)$.

5)– Interpréter les quantités $mA^{+}(n)$ et $aA^{-}(n)$.

6)– Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.

7)– Justifier le fait qu'on peut remplaçer $ln(1 - u)$ par $ln(u)$ dans la formule (7.3.2).

8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données **(Table 1.)** en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison.
Vous présenter les résultats de l'execution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

Chapitre 8

Programme du concours de l'agrégation - Session 2020

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maˆıtriser et savoir illustrer. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés K en général) sont supposés commutatifs.

8.1 Algèbre linéaire

8.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

2. Sous-espacess tables d'unendomorphisme. Valeurs propres,vecteurs propres,sous-espaces propres.

3. Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec K^n. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.
   Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.
   Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique. Poly- nômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley- Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

8.2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Produit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Décomposition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments in-

   versibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau Z et de l'algèbre $K[X]$ des polynômes sur le corps K. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $Q[X]$, critère d'Eisenstein.

5. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments in-

   versibles, fonction indicatrice d'Euler. Théorème chinois.

6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et tran-

   scendants. Exten- sions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis. Morphisme de Frobenius.

7. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadra- tiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments or- thogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme

54 de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de R ou C. Procédés d'orthogonalisation.

3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vec- toriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthog- onal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomor- phismes symé- triques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition po- laire dans $GL(n, \mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimen- sion 2, classification des éléments de $O(2, \mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de $O(3, \mathbb{R})$; produit mixte, produit vectoriel.

5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décom- position polaire dans $GL(n, \mathbb{C})$.

8.5 Géométrie affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous- espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, en- veloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

2. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Dé- placements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

3. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocy- clicité.

4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

8.6 Analyse à une variable réelle

8.6.1 Nombres réels

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

8.6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

8.6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

1. Continuité
   Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la conti- nuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

2. Dérivabilité
   Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Etude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

8.6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonc- tions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

8.6.5 Intégration

1. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

2. Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi- convergentes.

8.6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

8.6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractéri- sations de la convexité. Inégalités de convexité.

8.7 Analyse à une variable complexe

8.7.1 Séries entières

1. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

2. Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

8.7.2 Fonctions d'une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

2. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.

3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

4. Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

8.8 Topologie

8.8.1 Topologie et espaces métriques

1. Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

2. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

3. Compacité.Équivalencedesdéfinitionsentermesdevaleursd'adhérence(Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

4. Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

5. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

8.8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

2. Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

3. Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique, à valeurs dans un espace de Banach.

4. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

8.8.3 Espaces de Hilbert

1. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

2. Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces l^2 et L^2. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynomes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de Lax-Milgram. (

3. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1.

8.9 Calcul différentiel

8.9.1 Fonctions différentiables

1. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

2. Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'ap- plications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe C^1.

3. Applications de classe C^k. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral.

4. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe C^1 et C^2 définies sur un ouvert convexe $\mathbb{R}^n$.

5. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

8.9.2 Équations différentielles—

1. Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème “des bouts”).

2. Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

3. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

8.9.3 Géométrie différentielle

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$, position par rapport au plan tangent.

2. Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Etude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc C^1.

3. Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

8.10 Calcul intégral

8.10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Défini- tion des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

8.10.2 Intégration

1. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.

2. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabi- lité des intégrales à paramètres.

3. Espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$. Complétude. Inégalité de Holder.

4. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.

5. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

8.10.3 Analyse de Fourier

1. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Dirichlet, de Fejer et de Parseval.

2. Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème de Plancherel.

8.11 Probabilités

8.11.1 Définition d'un espace probabilisé

Evénements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

1. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

2. Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

1. Convergence en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

2. Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

8.12 Distributions

8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide. Transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $S(\mathbb{R}^d)$. Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente.

2. Espace $S'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées. Dérivation des distributions tempérées. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$). Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente. Exemples de distributions tempérées : fonctions localement intégrables, masse de Dirac, valeur principale de Cauchy, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac.

3. Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

8.12.2 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes. Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension 1.

8.13 Méthodes numériques

8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition LU. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel); analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.
Décomposition en valeurs singulières.
Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien $1D$.

8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puis- sance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

8.13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

8.13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynome de Lagrange d'une fonction en $(n+1)$ points, estimation de l'erreur. 13.5 Équations différentielles ordinaires Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

8.13.5 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.

Chapitre 9

Anexe : Sujets du concours

9.1 Épreuve écrite de mathématiques générales

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations et rappels.

- Si E est un ensemble fini, on note $\#E$ son cardinal.
- Si x est un nombre réel, on note $E(x)$ sa partie entière.
- Si $\mathbf{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbf{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, pour tous entiers naturels non nuls d, e, on note $\mathbf{M}_{d,e}(\mathbf{K})$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel des matrices à d lignes et e colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$; lorsque $d = e$, on note aussi $\mathbf{M}_d(\mathbf{K})$ la $\mathbf{K}$-algèbre des matrices à d lignes et d colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$, $GL_d(\mathbf{K})$ le groupe des matrices inversibles, et I_d la matrice identité dans $\mathbf{M}_d(\mathbf{K})$.
- Si $M = (m_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,d\}} \in \mathbf{M}_d(\mathbf{K})$, on note ${}^tM = (m_{ji})_{i,j\in\{1,\dots,d\}} \in \mathbf{M}_d(\mathbf{K})$ sa transposée.
- Une matrice M de $\mathbf{M}_d(\mathbf{K})$ définit un endomorphisme sur $\mathbf{K}^d$, endomorphisme qui envoie un vecteur V de $\mathbf{K}^d$ sur le vecteur MV. Cet endomorphisme est aussi noté M.
- Si $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbf{K}^d$, on note $\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^d |v_i|^2\right)^{1/2}$ et $\|v\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,d\}} |v_i|$. Pour tout entier $k \geq 0$, si $g = \sum_{i=0}^k g_i t^i \in \mathbf{K}[t]$ est un polynôme de degré au plus k, on note $\|g\|_2 = \left(\sum_{i=0}^k |g_i|^2\right)^{1/2}$ et $\|g\|_\infty = \max_{i\in\{0,\dots,k\}} |g_i|$.
- Si p est un nombre premier, on note π_p la projection canonique sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, c'est-à-dire le morphisme d'anneaux qui envoie un entier sur sa classe modulo p. Cette projection canonique s'étend en une application, notée elle aussi π_p, sur l'algèbre des polynômes $\mathbf{Z}[t]$, ainsi définie : si $P = \sum_{i=0}^d a_i t^i \in \mathbf{Z}[t]$ est un polynôme, on note $\pi_p(P)$ le polynôme $\sum_{i=0}^d \pi_p(a_i)t^i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$.
- On rappelle que l'anneau $\mathbf{Z}[t]$ est un anneau factoriel. On pourra utiliser sans démonstration le fait que deux polynômes f et g à coefficients entiers dont l'un est unitaire ont un unique pgcd unitaire qu'on notera pgcd(f, g). Ce pgcd est aussi l'unique pgcd unitaire de f et g considérés dans $\mathbf{Q}[t]$.
- Soit $f = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} f_i t^i \in \mathbf{C}[t]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$. On lui associe la

matrice

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -f_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -f_{d-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -f_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_d(\mathbf{C}). \tag{1}$$

On rappelle que le polynôme caractéristique de A_f est f.

Les questions préliminaires des différentes parties ont été rassemblées, sous forme d'exercices, au début du sujet ; il est vivement conseillé de les traiter en priorité.

Exercice 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R}).$$

1. Déterminer la dimension du noyau de la matrice A.
2. Quel est le déterminant de A ? Préciser le rang de A.
3. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

   Indication : on pourra calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Soit $f = t^d + \sum_{i=0}^{d-1} f_i t^i \in \mathbf{R}[t]$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ à coefficients réels.

1. Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,d\}} \in \mathbf{M}_d(\mathbf{C})$ une matrice. Montrer que si $\lambda \in \mathbf{C}$ est tel que, pour tout i, $|a_{ii} - \lambda| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors $A - \lambda I_d$ est inversible.
2. Soit λ une racine de f : montrer que la matrice $A_f - \lambda I_d$, avec la définition (1), n'est pas inversible.
3. Soit μ dans $\mathbf{C}$ tel que $|\mu| > 1 + \max_{i\in\{0,\dots,d-1\}} |f_i|$; montrer que la matrice $A_f - \mu I_d$ est inversible. En déduire que toutes les racines ρ de f vérifient $|\rho| \leq 1 + \|f\|_\infty$.
4. Soit $g = t^k + \sum_{j=0}^{k-1} g_j t^j \in \mathbf{C}[t]$ un polynôme unitaire divisant f, où $k \geq 1$. Montrer que

$$\|g\|_\infty \leq (2 + 2\|f\|_\infty)^k.$$

Exercice 3

Pour u et v deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$, on note $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ leur produit scalaire usuel. Soit $(b_1, \ldots, b_d)$ une famille de d vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^n$.

1. On se propose de démontrer qu'il existe une famille de d vecteurs $(b_1^*, \ldots, b_d^*)$ vérifiant les propriétés :

   [P1] $b_1^* = b_1$.

   [P2] pour $i \in \{2, \ldots, d\}$, $b_i^* = b_i - \sum_{j<i} \mu_{ij} b_j^*$, avec pour tout j dans $\{1, \ldots, i-1\}$, $\mu_{ij} = \frac{(b_i|b_j^*)}{(b_j^*|b_j^*)}$.

   [P3] $(b_i^*|b_j^*) = 0$ pour tous i, j dans $\{1, \ldots, d\}$ tels que $i \neq j$.

   (a) Soient $(b_1', \ldots, b_d')$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $b_1' = b_1$ et, pour tout i dans $\{2, \ldots, d\}$, il existe des nombres réels $(\alpha_{ij})_{1 \leq j \leq i}$ tels que $b_i' = b_i - \sum_{j<i} \alpha_{ij} b_j'$. Démontrer que, pour tout i dans $\{1, \ldots, d\}$, $\mathrm{Vect}(b_1, \ldots, b_i) = \mathrm{Vect}(b_1', \ldots, b_i')$ et en déduire que b_i' est non nul.

   (b) Construire par récurrence une famille de d vecteurs $(b_1^*, \ldots, b_d^*)$ vérifiant les propriétés **[P1]** et **[P2]**.

   (c) Démontrer que la famille de vecteurs ainsi construite vérifie la propriété **[P3]**.

On note B la matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbf{R})$ dont les colonnes sont les vecteurs $b_1, \ldots, b_d$ dans cet ordre.

2. Montrer que $\prod_{i=1}^{d} \|b_i^*\|_2 = (\det {}^tBB)^{1/2}$.
3. En déduire que, si $d = n$, $|\det B| \leq \prod_{i=1}^{d} \|b_i\|_2$.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Si n est un entier naturel, on définit $P_n \in \mathbf{Z}[t]$ par $P_n = t^{p^n} - t$.

1. Soient r et n deux entiers naturels, avec $r > 0$; on note $n = qr + k$, $0 \leq k < r$, la division euclidienne de n par r. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{Z}[t]$ tel que $P_n = QP_r + P_k$.
2. En déduire que $\mathrm{pgcd}(P_n, P_r) = P_{\mathrm{pgcd}(n,r)}$.
3. Soit $f \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ un polynôme irréductible de degré r ; on note (f) l'idéal $f\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$. Montrer que l'anneau $F = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f)$ est un corps fini de cardinal p^r. En déduire que f divise $\pi_p(P_r)$.

Soit $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré divisant n dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$. On considère le polynôme :

$$Q = \prod_{\phi \in \mathcal{I}_n} \phi.$$

4. Démontrer que Q divise $\pi_p(P_n)$.

Dans la suite du problème, on admettra l'égalité $Q = \pi_p(P_n)$.

Préambule au problème

L'objet de ce problème est de développer un ensemble d'outils permettant de calculer la décomposition en produit de puissances de polynômes irréductibles d'un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[t]$, en la déduisant d'un procédé analogue dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$.
La stratégie est de construire, étant donné un nombre premier p assez grand, un polynôme $g \in \mathbf{Z}[t]$, $\deg g < \deg f$, ayant de "petits" coefficients et tel que $\mathrm{pgcd}\,(\pi_p(f), \pi_p(g)) = 1$. Le problème s'organise de la manière suivante :

- La première partie étudie une suite matricielle de type arithmético-géométrique ; elle établit des résultats qui seront utiles dans la dernière partie.
- La deuxième partie établit que la stratégie est fondée, c'est-a-dire que si g est comme ci-dessus, alors $\mathrm{pgcd}\,(f, g) \notin \{1, f\}$ dans $\mathbf{Z}[t]$.
- La troisième partie propose une méthode de factorisation dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$.
- Les deux dernières parties décrivent un procédé qui peut être utilisé pour construire le polynôme g, ou *a contrario* prouver l'irréductibilité de f.

Partie 1

Dans cette partie, d est un entier naturel ≥ 2. On note

- H l'hyperplan de $\mathbf{R}^d$ défini par $H = \left\{(x_1, \ldots, x_d) \text{ tel que } \sum_{i=1}^{d} x_i = 0\right\}$,
- E le vecteur de $\mathbf{R}^d$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

Pour $k \in \{1, \ldots, d-1\}$, on introduit les matrices $M_k \in \mathbf{M}_d(\mathbf{R})$ définies par

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, d\}, \qquad (M_k)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \notin \{k, k+1\}, \\ 1/2 & \text{si } (i, j) \in \{k, k+1\}^2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2}$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon.

1. Soit k dans $\{1, \ldots, d-1\}$.
   (a) Démontrer que $\mathbf{R}^d = \mathrm{Vect}(\mathrm{E}) \oplus H$, que E est un vecteur propre de M_k associé à la valeur propre 1, et que H est stable par l'endomorphisme associé à M_k dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $\|M_k x\|_2 \leq \|x\|_2$. Etudier le cas d'égalité. On

pose $A = M_{d-1} \cdot M_{d-2} \cdots\cdots M_2 \cdot M_1$.

2. Démontrer que E est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, et que H est stable par l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$.
3. Montrer que si $x \notin \mathrm{Vect}(\mathrm{E})$, alors $\|Ax\|_2 < \|x\|_2$. En déduire que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}(\mathrm{E})$.
4. Soit A_H l'endomorphisme induit par A sur H. Justifier que la limite de la suite $(A_H^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est l'endomorphisme nul.

On note Π la projection sur $\mathrm{Vect}(\mathrm{E})$ parallèlement à H.

5. Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers Π.

Soit G un vecteur dans H.

6. Démontrer que l'équation $X = AX + G$ admet une unique solution dans H, qui sera notée Z. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $X = AX + G$ d'inconnue $X \in \mathbf{R}^d$.

7. Soit $X_0 \in \mathbf{R}^d$ un vecteur et $(X_l)_{l\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathbf{R}^d$ définie par récurrence par

$$X_{l+1} = AX_l + G, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Démontrer que la suite $(X_l)_{l\in\mathbf{N}}$ converge vers le vecteur

$$\lim_{l\to\infty} X_l = \Pi(X_0) + Z,$$

Partie 2

Soit $f = t^{\deg f} + \sum_{j=0}^{\deg f-1} f_j t^j$ un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[t]$ non constant.

1. Soit $g = \sum_{j=0}^{\deg g} g_j t^j$ un polynôme de $\mathbf{Z}[t]$, qu'on suppose premier avec f.
   (a) Justifier l'existence de $u = \sum_{j=0}^{\deg g-1} u_j t^j$ et $v = \sum_{j=0}^{\deg f-1} v_j t^j$ dans $\mathbf{Q}[t]$ tels que

$$uf + vg = 1.$$

Pour $i \in \{0, \ldots, \deg g - 1\}$ et $j \in \{0, \ldots, \deg f - 1\}$, on introduit les vecteurs w_i et z_j de $\mathbf{R}^{\deg f + \deg g}$ définis par

$$w_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{\deg f} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} i \\ \\ \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} \deg g - 1 - i \end{matrix} \qquad z_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{\deg g} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} j \\ \\ \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} \deg f - 1 - j \end{matrix}$$

et la matrice $M(f, g)$ dont les colonnes sont $w_0, \ldots, w_{\deg g-1}, z_0, \ldots, z_{\deg f-1}$, de sorte que l'identité

$$uf + vg = 1, \quad u = \sum_{i=0}^{\deg g-1} u_i t^i, \quad v = \sum_{i=0}^{\deg f-1} v_i t^i$$

se réécrit sous la forme du système linéaire suivant :

$$M(f, g) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{\deg g-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{\deg f-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que $\left|\det M(f,g)\right|$ est un entier naturel inférieur ou égal à $\|f\|_2^{\deg g}\|g\|_2^{\deg f}$.

On admet que $0 \quad \det M(f,g)$**.**

(c) Soit $r = \left|\det M(f,g)\right|$. Démontrer que les polynômes $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ définis par $\tilde{u} = ur$ et $\tilde{v} = vr$ sont dans $\mathbf{Z}[t]$ et vérifient $\tilde{u}f + \tilde{v}g = r$.

(d) Soit p un nombre premier tel que $\pi_p(f)$ et $\pi_p(g)$ ne sont pas premiers entre eux dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$.

i. Montrer que p divise $\det M(f,g)$.

ii. En déduire que $p \leq \|f\|_2^{\deg g}\|g\|_2^{\deg f}$.

2. On suppose que le polynôme f est sans facteur carré c'est-à-dire que la décomposition en produit de facteurs irréductibles de f s'écrit sous la forme $f = \prod_{i=1}^{t} f_i$, où les f_i sont irréductibles et deux-à-deux distincts. Soit p un nombre premier tel que

$$p > (\deg f)^{\deg f/2}\, \|f\|_2^{\deg f-1}\, (2 + 2\|f\|_\infty)^{\deg f(\deg f-1)}.$$

Soit $h \in \mathbf{Z}[t]$ unitaire, $h \neq 1$, $h = f$, et tel que $\pi_p(h)$ est un diviseur irréductible de $\pi_p(f)$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$. On note

$$\mathcal{L}_p(h) = \{h \cdot h_1 + ph_2,\ h_1, h_2 \in \mathbf{Z}[t],\ \deg(hh_1) \leq \deg f - 1,\ \deg h_2 \leq \deg f - 1\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un polynôme irréductible $g \in \mathbf{Z}[t]$ tel que $\pi_p(h)$ divise $\pi_p(g)$ et g divise f.

(b) Montrer que f n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[t]$ si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}_p(h)$ non nul avec

$$\|u\|_\infty \leq (2 + 2\|f\|_\infty)^{\deg f - 1}$$

et que dans ce cas $\mathrm{pgcd}\,(u,f)$ est un diviseur non trivial de f (c'est-à-dire que $\mathrm{pgcd}\,(u,f) \notin \{1,f\}$).

Indication : on pourra remarquer que si f n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[t]$, alors $g \in \mathcal{L}_p(h)$, et exploiter les rappels faits en préambule sur $\mathbf{Z}[t]$.

Partie 3

Dans toute cette partie, p est un nombre premier différent de 2, f est un polynôme unitaire, non constant, de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ de degré n sans facteur carré, et on note $f = f_1 \ldots f_r$ la décomposition de f en produit de facteurs irréductibles unitaires dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$.
On définit deux suites de polynômes $\left(u_i\right)_{i\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ et $\left(g_i\right)_{i\in\mathbf{N}\setminus\{0\}}$ de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ par

$$u_1 = \mathrm{pgcd}\,(f, t^p - t),\ g_1 = f/u_1 \text{ et, pour tout } i \geq 2,\ u_i = \mathrm{pgcd}\,(g_{i-1}, t^{p^i} - t),\ g_i = g_{i-1}/u_i.$$

Les pgcd utilisés pour cette définition sont tous choisis unitaires.

1. (a) Montrer que $\prod_{i=1}^{n} u_i = f$.

(b) Montrer que tous les facteurs irréductibles de u_i sont de degré i.

(c) Montrer que f est irréductible sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ si et seulement si $f = g_{E(n/2)+1}$.

On fait maintenant l'hypothèse que $f = f_1 \ldots f_r$, avec $r \geq 2$, les f_i irréductibles, deux à deux distincts et de même degré d. Soit C l'application

$$\begin{aligned} C : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t] &\longrightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t] \\ h(t) &\longrightarrow h(t)^{(p^d-1)/2}. \end{aligned}$$

En notant ω la projection canonique de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f)$, l'application C définit par factorisation une application $\overline{C}$ (on ne demande pas de vérifier cela) :

$$\begin{aligned} \overline{C} : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f) &\longrightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]/(f) \\ \omega(h) &\longrightarrow \omega(h)^{(p^d-1)/2}. \end{aligned}$$

2. Soit h dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ premier avec f. Montrer que $\overline{C}(\omega(h))^2 = 1$.
3. Montrer que $\#\overline{C}^{-1}(\{1\}) = \#\overline{C}^{-1}(\{-1\}) = \left(\frac{p^d-1}{2}\right)^r$.
4. On note $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]_{rd}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]$ de dimension rd constitué des éléments dont le degré est **strictement** inférieur à rd.
   (a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme à valeurs dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]_{rd}$. On note A l'événement $\{\mathrm{pgcd}\,(U, f) \notin \{1, f\}\}$ et B l'événement $\{\mathrm{pgcd}\,(C(U) - 1, f) \notin \{1, f\}\}$. Montrer que, pour $r \geq 2$, $p \geq 3$ et tout d,
   $$\Pr(A \cup B) = 1 - \frac{1}{p^{rd}} - 2\left(\frac{p^d-1}{2p^d}\right)^r \geq \frac{1}{2}.$$
   (b) Soit $(U_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme à valeurs dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[t]_{rd}$, et S la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ définie par
   $$S = \min\{i \in \mathbf{N} \text{ tel que } \mathrm{pgcd}\,(U_i, f) \notin \{1, f\} \text{ ou } \mathrm{pgcd}\,(C(U_i) - 1, f) \notin \{1, f\}\}$$
   avec la convention que le minimum de l'ensemble vide est $+\infty$. On note $\mathbf{E}(S)$ son espérance. Montrer que $\mathbf{E}(S) \leq 2$.

Partie 4

Pour tout nombre réel α, on note $[\alpha]$ la partie entière de α si $\alpha - \frac{1}{2}$ est un entier, et l'entier le plus proche de α sinon.
Pour tous vecteurs $u, v \in \mathbf{Q}^d$ avec v non nul, on pose

$$Q(u, v) = \left[\frac{(u|v)}{\|v\|_2^2}\right].$$

On note $\mathbf{M}(u, v) \in \mathrm{M}_{d,2}(\mathbf{R})$ la matrice dont la première colonne est u et la seconde colonne est v.

1. Montrer que $\|u - qv\|_2 \geq \|u - Q(u, v)v\|_2$, pour tout entier q.
2. Montrer que $|(u - Q(u, v)v|v)| \leq \|v\|_2^2/2$

À partir de maintenant, on suppose donnés deux vecteurs $u, v \in \mathbf{Q}^d$ linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^d$, et on pose $L(u, v) = \{au + bv,\ (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.
On construit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de vecteurs de $\mathbf{Q}^d$ par :

$$u_0 = u, \qquad v_0 = v, \qquad (u_{n+1}, v_{n+1}) = \begin{cases} (u_n, v_n) \text{ si } \|v_n\|_2 \geq \frac{\|u_n\|_2}{\sqrt{2}} \text{ et } n > 0, \\ (v_n, u_n - q_n v_n) \text{ avec } q_n = Q(u_n, v_n) \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que, pour tout n, il existe $\Gamma_n(u, v) \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z})$, avec $|\det \Gamma_n(u, v)| = 1$, tel que $\mathbf{M}(u_n, v_n) = \mathbf{M}(u, v)\Gamma_n(u, v)$.
4. Montrer que, pour tout n, $L(u_n, v_n) = L(u, v)$.
5. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $x \in L(u, v)$, $\lambda x \in \mathbf{Z}^d$.
6. Montrer qu'il existe k tel que $(u_{k+1}, v_{k+1}) = (u_k, v_k)$.
7. Pour cet entier k on note w le projeté de v_k orthogonalement à $\mathrm{Vect}(u_k)$. Montrer que $\|w\|_2 \geq \|u_k\|_2/2$.

On désigne par $\tilde{\Gamma}$ l'application qui à (u, v) associe la matrice $\Gamma_k(u, v) = \tilde{\Gamma}(u, v)$, où k est l'entier exhibé à la question 6.

Partie 5

On suppose dans cette partie que $(b_1, \ldots, b_d)$ sont des vecteurs de $\mathbf{Z}^n$ linéairement indépendants. On leur associe la famille $(b_1^*, \ldots, b_d^*)$ définie dans l'Exercice 3 (ce sont alors des vecteurs de $\mathbf{Q}^n$). Pour $i \in \{2, \ldots, d\}$, on note ω_i la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(b_i^*, \ldots, b_d^*)$. Enfin, on pose

$$L(b_1, \ldots, b_d) = \left\{ \sum_{i=1}^{d} x_i b_i,\ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{Z}^d \right\}.$$

1. Montrer que $\inf_{x\in L(b_1,\ldots,b_d)\setminus\{0\}} \|x\|_2 = \min_{x\in L(b_1,\ldots,b_d)\setminus\{0\}} \|x\|_2$.
2. Montrer que $\min_{x\in L(b_1,\ldots,b_d)\setminus\{0\}} \|x\|_2 \geq \min_{i\in\{1,\ldots,d\}} \|b_i^*\|_2$.
3. Soit $k \in \{2, \ldots, d-1\}$. Étant donnés $(b_1, \ldots, b_d)$ d vecteurs de $\mathbf{Z}^n$, on pose

$$T_k(b_1, \ldots, b_d) = (b_1, \ldots, b_{k-1}, b'_k, b'_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_d),$$

où

$$\mathbf{M}(b'_k, b'_{k+1}) = \mathbf{M}(b_k, b_{k+1})\tilde{\Gamma}(\omega_k(b_k), \omega_k(b_{k+1})).$$

Montrer que $L(T_k(b_1, \ldots, b_d)) = L(b_1, \ldots, b_d)$.

Si $(u_1, \ldots, u_d)$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}^n$ et $(u_1^*, \ldots, u_d^*)$ la famille orthogonale associée définie dans l'Exercice 3, on introduit le vecteur $V(u_1, \ldots, u_d) \in \mathbf{R}^d$ dont les coordonnées sont données par

$$\left(\log\|u_i^*\|_2 - \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \log\|u_k^*\|_2 \right), \quad i \in \{1, \ldots, d\}.$$

On définit les vecteurs $C_1, \dots, C_{d-1}$ de $\mathbf{R}^d$ suivants : C_k est le vecteur dont les coordonnées sont

$$(C_k)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{k, k+1\}, \\ 1 & \text{si } i = k, \\ -1 & \text{si } i = k+1. \end{cases}$$

On pose $\gamma = \log(2)/2$. Enfin, on introduit les vecteurs définis par les relations

$$g_1 = \gamma C_1, \quad g_{k+1} = M_{k+1} g_k + \gamma C_{k+1} \text{ pour } k \in \{1, \dots, d-2\}, \qquad G = g_{d-1},$$

où les matrices M_k sont définies par (2) dans la Partie 1. On va aussi utiliser la matrice $A = M_{d-1} \dots M_1$.
On définit un ordre partiel sur $\mathbf{R}^d$: avec $u = (u_1, \dots, u_d)$ et $v = (v_1, \dots, v_d)$ dans $\mathbf{R}^d$, on a $u \leq v$ si et seulement si $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

4. Soit $M \in \mathbf{M}_d(\mathbf{R})$ une matrice dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que pour tous u, v dans $\mathbf{R}^d$ tels que $u \leq v$, on a $Mu \leq Mv$.

On définit la matrice $P \in \mathbf{M}_d(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont

$$P_{ij} = 1 \text{ si } i \geq j, \ P_{ij} = 0 \text{ sinon, pour } i, j \in \{1, \dots, d\}.$$

On admet que les résultats de la Partie 4 se réécrivent sous la forme

$$PV(T_k(b_1, \dots, b_d)) \leq P\left(M_k V(b_1, \dots, b_d) + \gamma C_k\right),$$

pour tout $k \in \{1, \dots, d-1\}$ et pour toute famille $(b_1, \dots, b_d)$ de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{Z}^n$.

5. En déduire qu'en définissant $T(b_1, \dots, b_d) = T_{d-1}(T_{d-2}(\dots(T_1(b_1, \dots, b_d))))$, on a

$$PV(T(b_1, \dots, b_d)) \leq P\left(AV(b_1, \dots, b_d) + G\right).$$

Indication : on pourra remarquer que P est inversible et PAP^{-1} est une matrice à coefficients positifs ou nuls.

6. On pose $Z = \gamma \begin{pmatrix} d-1 \\ d-3 \\ \vdots \\ 3-d \\ 1-d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^d$ (la $k^{\text{ème}}$ coordonnée est donc $d-(2k-1)$). Montrer que $M_k Z = Z - \gamma C_k$. En déduire que $Z = AZ + G$ et que $Z \in H$, l'hyperplan défini en Partie 1.

7. (a) On considère la suite de vecteurs définie par

$$X_0 = V(b_1, \dots, b_d), \qquad X_{l+1} = AX_l + G.$$

En exploitant les résultats de la Partie 1, analyser le comportement de X_l quand $l \longrightarrow \infty$.

(b) Établir que, pour tout $l \in \mathbf{N}$, on a $PV(T^l(b_1, \dots, b_d)) \leq PX_l$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un entier $N_0(\varepsilon)$ tel que si $N \geq N_0(\varepsilon)$ et $(c_1, \dots, c_d) = T^N(b_1, \dots, b_d)$ alors on a

$$\|c_1\|_2 \leq 2^{(d-1)/2} \exp(\varepsilon) \left(\prod_{i=1}^{d} \|b_i^*\|_2 \right)^{1/d} \leq 2^{d-1} \exp(d\varepsilon) \|c_d^*\|_2.$$

On note $c_i^{(0)} = c_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. En reproduisant la même manipulation que précédemment sur $(c_1, \dots, c_{d-1})$, on obtient $(c_1^{(1)}, \dots, c_{d-1}^{(1)})$; puis de nouveau sur $(c_1^{(1)}, \dots, c_{d-2}^{(1)})$ on obtient $(c_1^{(2)}, \dots, c_{d-2}^{(2)})$, etc. jusqu'à obtenir $c_1^{(d-1)}$. On pose $\beta_i = c_i^{(d-i)}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$.

8. Montrer que $L(\beta_1, \dots, \beta_d) = L(b_1, \dots, b_d)$, et que

$$\min_{i \in \{1, \dots, d\}} \|c_1^{(i)}\|_2 \leq 2^{d-1} \exp(d\varepsilon) \min_{x \in L(b_1, \dots, b_d) \setminus \{0\}} \|x\|_2.$$

Les techniques de cette partie permettent donc de trouver un élément « presque minimal » de $\mathrm{L}_p(h)$ au sens de la norme euclidienne. En les combinant avec les techniques de la Partie 2, on peut construire un algorithme de factorisation de polynômes unitaires de $\mathbf{Z}[t]$.

9.2 Épreuve écrite d'analyse et probabilités

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations

— Pour s un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(s)$ la partie réelle de s et $\mathrm{Im}(s)$ sa partie imaginaire.

— Si t est un nombre réel strictement positif et s est un nombre complexe, la puissance complexe t^s est définie par $t^s = \exp((\mathrm{Re}(s) + i\mathrm{Im}(s))\ln(t))$.

— Pour x réel, on définit la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$ par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \text{ tel que } n \leq x\}$$

et la partie fractionnaire de x, notée $\{x\}$ par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

— **Séries de Fourier**

Soit f une fonction localement intégrable 1-périodique. Les coefficients de Fourier de f sont

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-i2\pi nt}\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right).$$

La série de Fourier associée à f est la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{i2\pi nx} = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{n\in\mathbf{N}^*} \left(a_n(f)\cos(2\pi nx) + b_n(f)\sin(2\pi nx)\right).$$

— Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'intérieur non vide. On désigne par $L^2(I)$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur I, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telles que $x \mapsto |f(x)|^2$ est intégrable sur I (au sens de la mesure de Lebesgue).

— Pour f une fonction définie sur $I \subset \mathbf{R}$, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, on désigne par $\mathrm{supp}(f)$ son *support* : $\mathrm{supp}(f) = I \setminus O$ où O est la réunion de tous les ouverts sur lesquels f est nulle presque partout. En particulier, pour presque tout $x \notin \mathrm{supp}(f)$, on a $f(x) = 0$.

— Pour une fonction f de $L^2(]0, +\infty[)$, on note $\|f\|_2$ la norme euclidienne de f définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_{]0,+\infty[} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

— Pour tout borélien $B \subset \mathbf{R}$, on désigne par $\mathbf{1}_B$ la fonction caractéristique de cet ensemble B : $\mathbf{1}_B(x)$ vaut 1 si $x \in B$ et vaut 0 si $x \notin B$.

— Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. On définit **sa transformée de Fourier** par

$$\hat{f} : \xi \in \mathbf{R} \longrightarrow \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Soit f une fonction mesurable sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles, on définit sa **transformée de Mellin** par

$$s \in \mathbf{C} \longmapsto \mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

aux points s de $\mathbf{C}$ pour lesquels $t \mapsto f(t)t^{s-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

— Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et T une application linéaire de E dans F. Si la quantité $\frac{\|T(u)\|}{\|u\|}$ reste bornée quand u décrit $E \setminus \{0\}$, on appelle norme de l'application linéaire T sa borne supérieure et on note

$$|||T||| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|T(u)\|_F}{\|u\|_E}.$$

Rappels

On rappelle ici quelques définitions utiles et des énoncés qui pourront être exploités ***sans démonstration*** *tout au long du sujet.*

— **Théorème d'holomorphie pour les séries de fonctions**
Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de Ω dans $\mathbf{C}$. On suppose
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est une fonction holomorphe sur Ω ;
- pour tout compact K de Ω, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur K ;

alors, la fonction F définie sur Ω par $F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z)$ est bien définie et holomorphe sur Ω.

— L'ensemble des fonctions à valeurs réelles à support compact dans $]0,+\infty[$ et continues sur leur support est dense dans $L^2(]0,+\infty[)$.

— **Théorème de Plancherel**
La restriction de la transformée de Fourier à l'ensemble des fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ intégrables sur $\mathbf{R}$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R})$, que l'on note encore $f \mapsto \hat{f}$.
Pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$, $\hat{f}(\xi)$ est la limite au sens de la norme quadratique de $L^2(\mathbf{R})$, lorsque T tend vers l'infini, de $\int_{-T}^{T} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
De plus, pour tout $f \in L^2(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.$$

— **Lemme de Fatou**
Pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions mesurables sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, la limite inférieure de f_n est mesurable sur I pour tout $n \in \mathbf{N}$ et on a

$$\int_I \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

— **Théorème de prolongement des applications linéaires continues de $L^2(]0,+\infty[)$.**
Soit $\mathbb{D}$ un sous-espace vectoriel dense de $L^2(]0,+\infty[)$. Soit $T : \mathbb{D} \longrightarrow L^2(]0,+\infty[)$ une application linéaire continue sur $\mathbb{D}$. Alors T se prolonge de façon unique en une application linéaire continue sur $L^2(]0,+\infty[)$ de même norme que la norme de T sur $\mathbb{D}$.

Le sujet débute par quatre questions préliminaires, essentiellement calculatoires, qui serviront dans la suite du problème mais qui penvent être traitées de manière indépendante. L'objectif de la partie II est d'établir quelques propriétés de la transformée de MELLIN définie par (2). La partie III est consacrée à une étude de la fonction zêta de RIEMANN. Dans la partie IV, on établit un lien entre la fonction partie fractionnaire et la fonction zêta de RIEMANN via la transformée de MELLIN. Dans la partie V, on démontre le sens « facile » du théorème de BAÉZ-DUARTE en prouvant que si la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ est dans l'adhérence d'un certain sous-espace vectoriel $\mathcal{B}$ dans $L^2(]0,+\infty[)$, alors la fonction zêta ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} : 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$. Dans la partie VI, on construit un endomorphisme invariant et continu de $L^2(]0,+\infty[)$ qui agit sur la fonction ρ étudiée en partie IV comme l'opérateur d'inversion J. Enfin, dans la partie VII, on construit à l'aide de la fonction μ de MÖBIUS, une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice de l'intervalle $]0,1]$ sur $]0,+\infty[$ mais qui diverge dans $L^2(]0,+\infty[)$.
Les parties sont généralement indépendantes ; en cas de besoin, on pourra admettre les résultats établis par certaines questions pour aborder les parties suivantes.

I Exercices préliminaires

1. Soient s un nombre complexe et t un réel strictement positif. Montrer que $|t^s| = t^{\mathrm{Re}(s)}$.
2. (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$ et que sa somme est une fonction continue sur $[0,1]$.

   (b) Déterminer le rayon de convergence r de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ et rappeler la valeur de sa somme sur $]-r,r[$.

   (c) En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
3. (a) Déterminer les coefficients de FOURIER a_n et b_n (voir (1)) de la fonction 1-périodique
$$x \longmapsto \{x\} - \frac{1}{2}.$$

   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(2\pi n x)}{-\pi n}$ converge simplement vers $\{x\} - \frac{1}{2}$ sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
4. (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

   (b) En appliquant, pour $0 < \varepsilon < R$, le théorème des résidus à la fonction $F(z) = e^{iz}/z$ sur le contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ formé des segments $[\varepsilon, R]$ et $[-R,-\varepsilon]$ et des demi-cercles de centre 0 et de rayons ε et R situés dans le demi-plan supérieur, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

II Autour de la transformée de Mellin

1. Soit f une fonction mesurable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note $I(f)$ l'ensemble
$$I(f) = \left\{\sigma \in \mathbf{R} \text{ tel que } \int_{]0,+\infty[} |f(t)|\, t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t < +\infty\right\}.$$

Montrer que, s'il est non vide, $I(f)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$.

Dans ce cas, on note $a(f) = \inf I(f)$ et $b(f) = \sup I(f)$ ($a(f)$ et $b(f)$ sont des éléments de $\overline{\mathbf{R}}$).

2. Montrer que si $f \in L^2(]0,+\infty[)$ est presque partout nulle sur $]1,+\infty[$, alors $]1/2,+\infty[\subset I(f)$. On s'intéresse **dorénavant** à la transformée de Mellin (2) de f.
3. Montrer que $\mathrm{M}f$ est bien définie sur la bande verticale du plan complexe (éventuellement non bornée à droite ou à gauche) $D(f) = \{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) \in I(f)\}$.
4. Déterminer l'intervalle $I(\mathbf{1}_{]0,1]})$ et la transformée de Mellin de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ sur $D(\mathbf{1}_{]0,1]})$.
5. Soit λ un réel strictement positif et soit f une fonction mesurable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On note $T_\lambda f$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $T_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Montrer que $I(f) = I(T_\lambda f)$ et que pour tout $s \in D(f)$, on a $\mathrm{M}(T_\lambda f)(s) = \lambda^{-s}\mathrm{M}f(s)$.

III Fonction zeta de Riemann

Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que la série converge, on note

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} \quad \text{et} \quad G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}.$$

1. (a) Montrer que les séries de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$ convergent simplement dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

   (b) Montrer que les fonction ζ et G sont holomorphes dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
2. Montrer que $\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{1-2^{s-1}}G(s)$ pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$.
3. Soit ε un réel strictement positif. On définit la suite $\left(B_\varepsilon(n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ des sommes partielles de la série définissant $G(\varepsilon)$ par $B_\varepsilon(0) = 0$ et pour $n \geq 1$, $B_\varepsilon(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^\varepsilon}$.

   (a) Vérifier que pour $s \in \mathbf{C}$ et N un entier strictement positif, on a
   $$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^s} = \sum_{n=1}^{N}\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon}-1\right) + \frac{B_\varepsilon(N)}{(N+1)^{s-\varepsilon}}.$$
   *On pourra appliquer le principe de sommation d'*Abel.

   (b) En déduire que la série définissant G converge dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > \varepsilon\}$ et que la fonction G vérifie pour s dans ce demi-plan,
   $$G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_\varepsilon(n)}{(n+1)^{s-\varepsilon}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon}-1\right).$$

   (c) i. Montrer que pour $t \in \mathbf{R}$ et $u > 0$, on a
   $$\left|(1+u)^{it}-1\right| \leq |t|u.$$

   ii. Montrer que pour $x \in [0,1]$ et $u > 0$, on a

$$\left|(1+u)^x - 1\right| \leq xu.$$

iii. Montrer que si $s = \sigma + it$ avec $t \in \mathbf{R}$ et $\sigma \in [\varepsilon, 1+\varepsilon]$, on a

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{s-\varepsilon} - 1 \right| \leq \frac{1+|t|}{n}.$$

(d) Montrer que G définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

4. En déduire que la fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$ que l'on notera encore ζ, et déterminer la valeur du résidu de ζ au pôle $s = 1$.
On pourra utiliser la question I.2.

IV Fonction partie fractionnaire

On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction ρ par

$$\rho(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. (a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer l'expression de ρ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
Préciser en particulier la valeur de $\rho(1/n)$. Déterminer également ρ sur $]1, +\infty[$.

   (b) Représenter la fonction ρ sur l'intervalle $[1/4, 3]$.

   (c) Déterminer le domaine de continuité de ρ sur $]0, +\infty[$, montrer que ρ est bornée et déterminer l'image par ρ de l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. Montrer que $\rho \in L^2(]0, +\infty[)$ et que $\|\rho\|_2 \leq \sqrt{2}$.

3. Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) < 1$, montrer que $x \mapsto \rho(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer

$$I_1(s) = \int_1^{+\infty} \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

4. (a) Pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$, montrer que $x \mapsto \rho(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$ puis montrer que la fonction I_2 définie sur $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$ par

$$I_2(s) = \int_0^1 \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

est holomorphe sur $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

   (b) Montrer que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_0^1 \rho(x)x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ *de deux manières différentes.*

   (c) En déduire que 1 est l'unique pôle de ζ dans le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(s) > 0\}$ et retrouver la valeur du résidu de ζ en $s = 1$.

5. Montrer que $]0, 1[\subset I(\rho)$ et que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, $\mathbf{M}\rho(s) = -\frac{\zeta(s)}{s}$.

V Distance de $\mathbf{1}_{]0,1]}$ à un espace de fonctions

Soit N un entier positif. On note $\mathcal{B}_N$ le sous-espace vectoriel de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho : x \mapsto \rho(nx)$ avec $n \in \{1,\dots,N\}$. Autrement dit $\mathcal{B}_N$ est l'ensemble des applications $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définies par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \rho(nx), \tag{3}$$

avec $N \in \mathbf{N}^*$ et $c_1, \cdots, c_N$ des nombres réels. Pour $f \in \mathcal{B}_N$, on définit sur $\mathbf{C}$ le polynôme de Dirichlet Q_f associé à f par

$$Q_f(s) = \sum_{n=1}^{N} c_n n^{-s}. \tag{4}$$

On note $\widetilde{\mathcal{B}}_N = \{f \in \mathcal{B}_N \text{ tel que } Q_f(1) = 0\}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{B}_N$, alors f est nulle sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_N$.
2. Si $f \in \mathcal{B}_N$, on note $\tilde{f} = f - Q_f(1)\rho$.
   (a) Montrer que $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{B}}_N$.
   (b) Montrer que
   $$\int_1^{+\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = |Q_f(1)|^2.$$
   (c) En déduire que
   $$\int_0^{+\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq 2\int_0^{+\infty} |f(x) - \mathbf{1}_{]0,1]}(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$
   puis que
   $$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \leq (1+\sqrt{2})\|f - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2.$$
   On pourra utiliser la question IV.2.
3. Montrer que pour $s \in \mathbf{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ et $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_N$, on a
   $$\int_0^1 \tilde{f}(x) x^{s-1} \, \mathrm{d}x = -Q_{\tilde{f}}(s) \frac{\zeta(s)}{s}.$$
   On pourra utiliser les questions II.5 et IV.5.
4. Supposons qu'il existe $\beta \in \mathbf{C}$ tel que $1/2 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$ et $\zeta(\beta) = 0$. Soit f une fonction de $\mathcal{B}_N$. Déduire des questions précédentes la minoration suivante de la distance dans $L^2(]0,+\infty[)$ entre la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ et $\tilde{f}$:
   $$\|\tilde{f} - \mathbf{1}_{]0,1]}\|_2 \geq \frac{\sqrt{2\mathrm{Re}(\beta) - 1}}{|\beta|}.$$
   On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. En déduire que si la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ appartient à l'adhérence du sous-espace vectoriel de $L^2(]0,+\infty[)$ engendré par les fonctions $T_n\rho$ avec $n \geq 1$, alors la fonction ζ ne s'annule pas dans la bande verticale $\{s \in \mathbf{C} \text{ tel que } 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

VI Applications linéaires de $L^2(]0,+\infty[)$.

1. Soit ϑ un réel strictement positif. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $D_\vartheta f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ par $D_\vartheta f(x) = \sqrt{\vartheta} f(\vartheta x)$ pour $x > 0$.
   (a) Montrer que D_ϑ est une application linéaire bijective sur $L^2(]0,+\infty[)$ telle que
   $$\|D_\vartheta f\|_2 = \|f\|_2.$$
   (b) Montrer que l'ensemble $\{D_\vartheta, \vartheta > 0\}$ muni de la loi de composition est un groupe commutatif.

   On dira qu'une application de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$ est invariante si elle commute avec les endomorphismes D_ϑ pour tout $\vartheta > 0$.
2. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $Jf :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ par $Jf(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.
   (a) Montrer que J est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$ et déterminer sa norme.
   (b) Pour $\vartheta > 0$, déterminer ϑ' tel que $JD_\vartheta = D_{\vartheta'} J$.
3. Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $Hf :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ par $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.
   (a) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On suppose de plus que f est continue.
   Montrer que $Hf \in L^2(]0,+\infty[)$ et $\|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2$.
   On pourra majorer, pour $0 < \xi < X$, l'intégrale $\int_\xi^X Hf(x)^2\,\mathrm{d}x$ en commençant par intégrer par parties.
   (b) Montrer que H est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$.
4. (a) Montrer que si $f \in L^2(]0,+\infty[)$, alors pour presque tout réel x, la limite au sens de la norme quadratique $\|\cdot\|_2$, lorsque T tend vers l'infini, de $2\int_0^T f(u)\cos(2\pi x u)\,\mathrm{d}u$ existe. On note $\mathcal{G}(x)$ cette limite. Montrer que $\mathcal{G} \in L^2(\mathbf{R})$.
   (b) **On note C l'application qui à $f \in L^2(]0,+\infty[)$ associe $Cf :]0,+\infty[\mapsto \mathbf{R}$ définie presque partout sur $]0,+\infty[$ par $Cf(x) = \mathcal{G}(x)$.**
   Montrer que C est un endomorphisme continu de $L^2(]0,+\infty[)$ et donner une majoration de sa norme.
5. **On note I l'identité de $L^2(]0,+\infty[)$ et V l'application $V = (H - I)CJ$.**
   (a) Montrer que V est une application linéaire continue de $L^2(]0,+\infty[)$ dans $L^2(]0,+\infty[)$.
   (b) Soit $f \in L^2(]0,+\infty[)$. On suppose de plus f à support compact et continue sur son support. Montrer que pour $x > 0$, on a
   $$Vf(x) = \int_0^{+\infty} f(v)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{\sin(2\pi x/v)}{\pi x/v}\right)\mathrm{d}v.$$
   (c) Montrer que V est une application invariante.
   (d) Le but de cette question est de montrer que $V\rho = J\rho$.
      i. Soit n un entier strictement positif. Montrer que pour $x \in]0,+\infty[\setminus \{1/n, n\}$, on a
      $$\rho(x)\mathbf{1}_{]1/n,n]}(x) = (J\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) - \sum_{j=1}^{n-1} j\mathbf{1}_{]1/(j+1),1/j]}(x).$$
      ii. En utilisant la question précédente, montrer que pour $x \in]0,+\infty[\setminus \{1/n, n\}$, on a
      $$V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})(x) = \frac{1}{\pi x}\left(\sin(2\pi x/n) + \int_{2\pi x/n}^{2\pi x n}\frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\sin(2\pi x j)}{j}\right).$$
      iii. Montrer que la suite de fonctions $\left(V(\rho\mathbf{1}_{]1/n,n]})\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement vers $J\rho$ sur $]0,+\infty[\setminus\mathbf{N}^*$.

      On pourra utiliser les résultats des questions I.3 et I.4.
      iv. En déduire $V\rho = J\rho$ presque partout sur $]0,+\infty[$.

VII Convergence d'une suite de $\cup_N \mathcal{B}_N$ vers $\mathbf{1}_{]0,1]}$

Soit $\mu : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier,} \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier strictement positif n, on a :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

   où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs positifs de n.

2. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout réel y positif, on a

$$\sum_{1 \le n \le y} \mu(n) \lfloor y/n \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } y \ge 1, \\ 0 & \text{si } y \in [0, 1[. \end{cases}$$

   Dans le cas $y \ge 1$, on pourra écrire $\lfloor y/n \rfloor = \sum_{k \le y/n} 1.$

   On admet pour la suite du sujet que la série $\sum_{n \ge 1} \frac{\mu(n)}{n}$ converge, que sa somme est nulle et que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \right)_{n \ge 1}$ ne converge pas vers 0.

3. Pour $N \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on note $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-\mu(n))\rho(nx)$.
   (a) Montrer que $S_N \in \mathcal{B}_N$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $\left(S_N \right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]0,1]}$ sur $]0, +\infty[$.

4. (a) Montrer que l'on a

$$\int_0^{1/N} |V S_N(x)|^2 \, dx = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} \mu(n) \right)^2,$$

   où V est l'application linéaire définie à la partie VI.
   (b) En déduire que la suite $\left(S_N \right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ ne converge pas dans $L^2(]0, +\infty[)$.

Bibliographie

[1] ABELSON H. SUSSMAN G. J. SUSSMAN J. Structure and interpretation of computer programs MIT PRESS

[2] AEBISCHER B L2 Analyse fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique VUIBERT

[3] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[4] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[5] L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[6] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[7] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[8] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[9] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[10] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[11] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[12] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[13] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[14] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[15] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie
Tome I
Tome II ELLIPSES

[16] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[17] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[18] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[19] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[20] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[21] ARNOLD V. lectures on partial differential equations SPINGER SPINGER

[22] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[23] AEBISCHER B. L3 Géométrie VUIBERT

[24] AHUÉS M. CHATELIN F. Exercices de valeurs propres de matrices MASSON

[25] ALBERT L. Collectif Cours et exercices d'informatique VUIBERT

[26] ALDON G. Mathématiques dynamiques HACHETTE

[27] ALESSANDRIM. Thèmes de géométrie DUNOD

[28] ALLAIRE G Analyse numérique et optimisation Ecole polytechnique

[29] ALLOUCHE J. P. SHALLIT J. Automatic sequences theory, applications, Generalizations CAMBRIDGE

[30] AMAR E. MATHERON É. Analyse complexe CASSINI

[31] ANDLERM. BLOCH J. D. MAILLARD B. Exercices corrigés de Mathématiques
Tome 1A - Topologie
Tome 1B - Fonctions numériques
Tome 2 - Suites et séries numériques
Tome 3 - Analyse fonctionnelle
Tome 5 - Algèbre générale, polynômes
Tome 6 - Algèbre linéaire, première partie
Tome 7 - Algèbre linéaire, deuxième partie ELLIPSES

[32] ANDREWS G. Number Theory DOVER

[33] APPLE A.W. Modern compiler implementation in C in Java in ML CAMBRIGDE

[34] ARIBAUD F. VAUTHIER J. Mathématiques. Première année de DEUG ESKA

[35] ARNAUDIES J-M. BERTIN J. Groupes, Algèbres et Géométrie Tome I
Tome II ELLIPSES

[36] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'analyse DUNOD

[37] ARNAUDIES J-M. DELEZOIDE P. FRAYSSE H. Exercices résolus d'algèbre bilinéaire et géométrie du cours deMathématiques tome 4 DUNOD

[38] ARNAUDIES J-M. FRAYSSE H. Cours deMathématiques
1. Algèbre
2. Analyse
3. Compléments d'analyse
4. Algèbre bilinéaire et géométrie DUNOD

[39] ARNOLD V. Chapitre supplémentaire de la théorie des équations différentielles ordinaires MIR

[40] ARNOLD V. Équations différentielles ordinaires MIR

[41] ARNOLD V. lectures on partial différentiel équations SPINGER SPINGER

[42] ARNOLD A. Mathématiques pour l'informatique EDISCIENCES

[43] GUESSARIAN I. ARTIN E. Algèbre géométrique GAUTHIERVILLARS

[44] ARTIN E. Algèbre géométrique GABAY

[45] ARTINM. Algebra PRENTICE HALL PRENTICE HALL

[46] AUBIN J.P. Analyse fonctionnelle appliquée
Tome 1
Tome 2 PUF

[47] AUTEBERT J.M. Calculabilité et décidabilité MASSON

[48] AUTEBERT J.M. Théorie des langages et des automates MASSON

[49] AUDIN M. Géométrie de la licence à l'agrégation BELIN

[50] AVANISSIAN V. Initiation à l'analyse fonctionnelle PUF

[51] AVEZ A. Calcul différentiel MASSON

[52] BAASE S. VAN GELDER A. Computer algorithms Introduction to design & analysis ADDISON

[53] WESLEY BADOUEL E. BOUCHERON S. DICKY A., PETIT A.

[54] SANTHAM., WEIL P., ZEITOUNM. Problèmes d'informatique fondamentale SPRINGER

[55] BACAER N. Histoires de mathématiques et de populations CASSINI

[56] BAJARD J.C. Exercices d'Algorithmique ITP

[57] BAKHVALOV N. Méthodes numériques MIR

[58] BARANGER J. Analyse numérique HERMANN

[59] BARBE Ph. LEDOUXM. Probabilité (De la licence à l'agrégation) BELIN

[60] BARRETM. BENIDIRM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD DUNOD

[61] BASILI B. PESKINE C. Algèbre DIDEROT, ÉDITEUR ARTS ET SCIENCES

[62]BASS J. Cours deMathématiques
Tome 1
Tome 2 MASSON

[63] BHATIA R. Matrix Analysis SPRINGER

[64] BAUER F. L. Decrypted secrets.Methods and maxims of cryptology SPRINGER

[65]BENDER C. ORSZAG S. Advanced mathematical methods for scientists and engineers MC GRAW HILL

[66] BENIDIRM. BARRETM. Stabilité des filtres et des systèmes linéaires DUNOD

[67]BENOIST J. et Alii Math L2, Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés PEARSON EDUCATION

[68] BENOIST J.SALINIER A. Exercices de calcul intégral Dunod

[69] BENZONI-GAVAGE S Calcul différentiel et équations différentielles DUNOD

[70] BERCU B. CHAFAI D. Modélisation stochastique et simulation DUNOD

[71] BERGER M. GOSTIAUX B. Géométrie différentielle ARMAND

[72]COLIN BERGER M. BERRY J-P. PANSU P. SAINT RAYMOND X. Problèmes de géométrie commentés et rédigés CÉDIC/NATHAN

[73] BERGER M. Géométrie Index
1. Action de groupes, espaces affines et projectifs
2. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères
3. Convexes et polytopes, olyèdres réguliers,aires et volumes
4. Formes quadratiques,quadriques et coniques
5. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères CÉDIC/NATHAN

[74] BERGER M. Géométrie tome 2 NATHAN

[75] BERGER M. Géométrie vivante CASSINI

[76] BERLINE N. SABBAH C. Groupes finis, journées X-UPS 2000 EDITIONS DE L'X

[77] BHATIA R. Matrix analysis 1 SPRINGER

[78] BICKEL P.J. DOKSUM K.A. Mathematical statistics PRENTICE HALL

[79] BIDEGARAY B. MOISAN L. Petits problèmes de mathématiques appliquées et de modélisation SPRINGER

[80] BIGGS NORMAN L. Discrete mathematics OXFORD SCIENCE

[81] PUBLICATIONS BLANCHARD A. Les corps non commutatifs PUF

[82] BILLINGSLEY P. Probability and measure COPYRIGHTED MATERIAL

[83] BOAS R. A primer of real functions MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

[84] BOISSONAT J.D. YVINEC M. Géométrie algébrique EDISCIENCE

[85] BON J.L. Fiabilité des systèmes MASSON

[86] BONNANS J.F. GILBERT J.C. LEMARECHAL C. SAGASTIZABAL C. PENNEQUIN D. Optimisation numérique SPRINGER

[87] BONY J.M Cours d'analyse Ecole polytechnique

[88] BONY J.M Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Ecole polytechnique

[89] BOUALEMH. BROUZET J.C. ELSNER B. KACZMAREK L. Mathématique L1 PEARSON EDUCATION

[90] BOURBAKI N. Éléments de Mathématique Topologie générale, chapitres V à X
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à VII
Fonctions d'une variable réelle, chapitres I à III
Fascicule XIII Intégration, chapitres I à IV HERMANN

[91] BOURGADE P. Annales des Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005 CASSINI

[92] BOUVIER A. RICHARD D. Groupes HERMANN

[93] BREMAUD P Introduction aux probabilités SPRINGER

[94] BREZIS H. Analyse fonctionnelle, théorie et applications MASSON

[95] BRIANE M. PAGES G. Théorie de l'intégration Cours et exercices, 3ème édition VUIBERT

[96] BROUSSE P. Mécanique MP - PC.- Spéciales A. A'. B. B'. ARMAND

[97] COLIN BRUCE J.W. GIBLIN P.J. RIPPON P.J. Microcomputers and Mathematics CAMBRIDGE

[98] CABANE R. LEBOEUF C. Algèbre linéaire
1. Espaces vectoriels , Polynômes
2. Matrices et réduction ELLIPSES

[99] CABANNES H. Cours de Mécanique générale DUNOD

[100] CALAIS J. Éléments de théorie des anneaux PUF

[101] CALAIS J. Éléments de théorie des groupes PUF

[102] CANDELPERGHER B. Calcul intégral CASSINI

[103] CANDELPERGHER B Théorie des probabilités Calvage et Mounet

[104] CALDERO P. GERMONI J Histoires hédonistes de groupes et de géométries Calvage et Mounet

[105] CARREGA J.C. Théorie des corps HERMANN

[106] CARTAN H. Calcul différentiel (1971) HERMANN

[107] CARTAN H. Cours de calcul différentiel (1977) HERMANN

[108] CARTAN H. Formes différentielles HERMANN

[109] CARTAN H. Théorie élémentaire des fonctions analytiques HERMANN

[110] CARTON O. Langages formels, calculabilité et complexité VUIBERT

[111] CASTLEMAN K.R. Digital image processing PRENTICE HALL

[112] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics I WILEY INTERSCIENCE

[113] CASTI J.L. Realty Rules : Picturing the world in mathematics II WILEY INTERSCIENCE

[114] CHABAT B. Introduction à l'analyse complexe MIR

[115] CHAMBERT-LOIR A. Algèbre corporelle EDITIONS DE L'X

[116] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. MAILLOT V. Exercices de mathématiques pour l'agrégation Analyse 1 (seconde édition revue et corrigée) MASSON

[117] CHAMBERT-LOIR A. FERMIGER S. Exercices de mathématiques pour l'agrégation
Analyse 2
Analyse 3 MASSON

[118] CHARPENTIER E. NIKOLSKI N. Leçons de mathématiques d'aujourd'hui Vol 1 Vol 2 Vol 3 Vol 4 ELLIPSES

[119] CHARLES J. MBEKHTAM. QUEFFELEC H. Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs ELLIPSES

[120] CHATELIN F. Valeurs propres de matrices MASSON

[121] CHILDS L. A concrete introduction to Higher Algebra SPRINGER

[122] VERLAG CHOQUET G. Cours d'analyse Tome II : Topologie MASSON

[123] CHOQUET G. L'enseignement de la géométrie HERMANN

[124] CHOIMET D. QUEFFELEC H. Analyse mathématique CASSINI

[125] CHRISTOL G. PILIBOSSIAN P. YAMMINE S. Algèbre 1 Algèbre 2 ELLIPSES

[126] CIARLET P.G. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation MASSON

[127] COGIS O. ROBERT C. Au-delà des ponts de Könisberg. Théorie des graphes. Problèmes, théorie, algorithmes VUIBERT

[128] COHN P.M. Algebra Volume 1 JOHN WILEY

[129] COLLET H. GIRARD B. Mathématique BTS industriel NATHAN