Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle

de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

RAPPORT D'AGREGATION DE MATHEMATIQUES

SESSION 2022

AGREGATION DE MATHEMATIQUES MAROCAINE
SESSION 2022

Rapport du jury présenté par :
Professeur Omar El-Fallah : Président du jury
Université Mohammed V de Rabat
Faculté des Sciences de Rabat
e–mail: o.elfallah@um5r.ac.ma

Table des Matières

Chapitre 1

Composition du jury

1.1 Directoire

El-Fallah Omar	Professeur de l'enseignement supérieur
Ouassou Idir	Professeur de l'enseignement supérieur
Alla Abdellah	Professeur de l'enseignement supérieur

1.2 Jury

1.2.1 Analyse et Probabilités

El Had Said	Professeur de l'enseignement supérieur
Sadik Omar	Professeur agrégé
Zerouali Elhassan	Professeur de l'enseignement supérieur

1.2.2 Algèbre et Géométrie

Bouchikhi Lahcen	Professeur de l'enseignement supérieur
El Amdaoui Mostapha	Professeur agrégé
Hajmi Said	Professeur agrégé
Zguiti Hassan	Professeur de l'enseignement supérieur

1.2.3 Modélisation et Calcul Scientifique

Boujaida Sadik	Professeur agrégé
Elkahoui M'hammed	Professeur de l'enseignement supérieur
Kanbar Ahmed	Professeur de l'enseignement supérieur
Taik Ahmed	Professeur de l'enseignement supérieur

Chapitre 2

Introduction

Le concours de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans les lycées d'enseignement général et technologique ou dans les classes préparatoires aux grandes écoles. Le jury exige du professeur agrégé un niveau lui permettant d'intervenir sereinement et efficacement sur ces créneaux. Cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.
La session 2022 est la neuvième session ouverte aux agrégatifs de la deuxième année du cycle de préparation à l'agrégation instaurée aux C.R.M.E.F du Royaume. Le cycle de formation C.R.M.E.F dure deux ans et est ouvert, après concours, aux étudiants titulaires d'un master, aux ingénieurs d'Etat ainsi qu'aux professeurs de second cycle titulaires d'une licence avec trois années d'ancienneté.
Au terme de la préparation, les candidats composent à Rabat, comme leurs pairs en France, les mêmes épreuves écrites, sous la présidence d'un jury français et en présence de représentants marocains.
Les épreuves sont ensuite envoyées en France pour correction. L'opération de déchiffrage des résultats se fait en France. Une réunion du jury marocain est tenue à Rabat pour la déclaration des candidats admissibles. Ensuite, les candidats retenus doivent passer l'oral devant le jury marocain, à qui revient le dernier mot en ce qui concerne l'admission.

Le nombre de postes disponibles pour la session 2022 du concours de l'agrégation de mathématiques marocaine est de 50 postes. Le nombre des inscrits au concours en 2022 est de 254. Parmi les 128 ayant composé aux deux épreuves écrites, 101 candidats ont obtenu une moyenne supérieure ou égale à 5/20. Le jury marocains a déclaré admissibles 75 candidats en fixant le seuil d'admissibilté à 6,125/20.
Ce rapport a pour objectif de présenter les résultats de la session 2022 et de donner des remarques et des conseils aux candidats de la session 2023 pour une meilleure préparation.

L'ensemble de membres du jury tiens à remercier vivement, pour le soutien matériel et moral:

1. Le Centre National des Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation.
2. L'Unité Centrale de la Formation des Cadres.
3. La direction du C.R.M.E.F de Rabat.

Ces équipes n'ont épargné aucun effort pour la réussite et le bon déroulement de ce concours.

Chapitre 3

Déroulement du concours et résultats

3.1 Déroulement de la session 2022

Déroulement des épreuves écrites

Les épreuves écrites de l'agrégation de mathématiques 2022 se sont déroulées selon le calendrier suivant :

- Le jeudi 24 février 2022 pour l'épreuve de mathématiques générales.
- Le vendredi 25 février 2022 pour l'épreuve d'analyse et probabilités.

Les délibérations pour l'admissibilité ont eu lieu le lundi 16 mai 2022. Rappelons que le concours fait l'objet de conventions internationales qui lient le Maroc, la France et la Tunisie et que la note des épreuves écrites représente les 2/5 de la note finale. Le seuil d'admissibilité pour les étudiants du Maroc est supérieur ou égale au seuil fixé par le jury français.

Déroulement des épreuves orales

Les épeuves d'admission se sont déroulées du Lundi 13 Juin 2022 au Samedi 18 juin 2022 et du Lundi 20 Juin 2022 au Samedi 25 Juin 2022. La liste d'admission a été publiée le dimanche 26 Juin 2022. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué.

Les oraux de l'agrégation sont constitués de trois épreuves :

- Algèbre et géométrie;
- Analyse et probabilités;
- Modélisation et calcul scientifique.

Dimanche 12 Juin 2022 à partir de 10h00 au CRMEF, Rabat

- Réunion d'accueil présidée par O. EL FALLAH, président du jury à partir 10 h ;
- Préparation des couplages et mise sous enveloppes ;
- élaboration du planning de préparation et de passage des candidats par épreuve ;
- Validation, par les candidats, du planning anonyme de passage par épreuve ;

- Inspection, par les membres du jury, de la bibliothèque et de la salle d'informatique, et contrôle des ouvrages apportés par les candidats.

- Tirage au sort de l'ordre de passage des candidats et des enveloppes contenant les sujets des différentes épreuves vers 14h ;

Remarque 3.1.1 *Il est rappelé que pendant la préparation, le candidat peut utiliser les ouvrages qui se trouvent sur place à la bibliothèque du CPAM. Il peut également utiliser les ouvrages de référence qu'il peut lui même apporter. Ces ouvrages ne doivent pas comporter de notes manuscrites et doivent être remis à l'administration la veille du commencement du concours, afin que le jury puisse les contrôler avant d'autoriser leur utilisation. Ainsi, après enregistrement, ils seront mis à la disposition de tous les candidats.*

Du Lundi 13 Juin 2022 au Samedi 18 juin 2022 et du Lundi 20 Juin 2022 au Samedi 25 Juin 2022: Déroulement des épreuves orales ;

Dimanche 26 Juin 2022 de 09 h à 12 h : délibérations, communication des résultats et discussions avec les formateurs des CRMEF du Royaume

3.2 Résultats généraux

Candidats marocains inscrits pour les épreuves écrites	254
Postes mis au concours	50
Candidats marocains présents à toutes les épreuves écrites	128
Candidats eliminés	53
Candidats admissibles	75
Candidats admis	35

Tableau 1 - Résultats généraux de la session 2022

Résultat du concours national de l'agrégation de mathématiques Session 2022

Liste des admis par ordre alphabétique

Ordre	Nom	Prénom	Décision du jury
1	AIT BALKASSAM	MOHAMED	Admis
2	ALLOU	MOHAMMED	Admis
3	AMALIKI	YOUNES	Admis
4	ASSARRAR	ABDELGHANI	Admis
5	AZGAOUN	HAMZA	Admis
6	BADDI	IMANE	Admis
7	BAKRY	MOHAMED	Admis
8	BELEHSEN	SAID	Admis
9	BOUSMAHA	MOHAMED	Admis
10	EL ALLAOUI	TIWMZIL ABDELLAH	Admis
11	EL AMRI	AAZEDDINE	Admis
12	EL AMRI	AMNAY	Admis
13	EL BOURAKADI	ZAKARIA	Admis
14	EL GARI	YACINE	Admis
15	EL MABTOUL	SALAH EDDINE	Admis
16	EL MAMRY	HAMZA	Admis
17	EL MOBACHI	ABDELAZIZ	Admis
18	EL-KHANCHOULI	KARIM	Admis
19	ELAZIMANI	ABDELGHANI	Admis
20	ELMORABITI	OTHMANE	Admis
21	ERRAZKA	YOUSSEF	Admis
22	FAOUZI	YOUSSEF	Admis
23	HADACH	ZAID	Admis
24	HRIFECH	IMANE	Admis
25	JALOUT	MOHAMMED	Admis
26	KHAIDER	BRAHIM	Admis
27	LABHIOUI	YOUNESS	Admis
28	LAHWATE	MOHAMED RASSAN	Admis
29	LAMSAF	KHALIL	Admis
30	MAICHINE	MOHAMED	Admis
31	NABIL	MEHDI	Admis
32	NIAOUAMEN	RACHID	Admis
33	OUALDCHAIB	ACHRAF	Admis
34	OUZINBA	ISMAAIL	Admis
35	SEMMAMI	RACHID	Admis

Nombre total de candidats déclarés admis : Trente cinq (35)

Résultat du concours national
de l'agrégation de mathématiques
Session 2022

Candidats admis et proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE

Ordre	Nom	Prénom
1	AMALIKI	YOUNES
2	BADDI	IMANE
3	BELEHSEN	SAID
4	BOUSMAHA	MOHAMED
5	EL AMRI	AAZEDDINE
6	EL BOURAKADI	ZAKARIA
7	EL MAMRY	HAMZA
8	EL-KHANCHOULI	KARIM
9	ELAZIMANI	ABDELGHANI
10	ERRAZKA	YOUSSEF
11	HADACH	ZAID
12	HRIFECH	IMANE
13	JALOUT	MOHAMMED
14	KHAIDER	BRAHIM
15	LAMSAF	KHALIL
16	MAICHINE	MOHAMED
17	NABIL	MEHDI
18	NIAOUAMEN	RACHID
19	OUZINBA	ISMAAIL

Candidats proposés pour effectuer un stage probatoire en CPGE : Dix neuf (19)

Chapitre 4

Statistiques

4.1 Répartition des notes des épreuves écrites

4.1.1 Répartition des candidats admissibles selon le genre

Parmi les candidats admissibles on trouve :

Sexe	Nombre	Pourcentage
Femme	8	10,67%
Hommes	67	89,33%

Répartition des admissibles selon le genre

4.1.2 Répartition des notes des épreuves écrites

Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve écrite des 75 candidats

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Mathématiques générales (note sur 20)	5,00	11,25	7,71	1,52	7,50
Analyse et probabilités (note sur 20)	5,25	13,25	8,09	1,72	7,75
Total écrit (note sur 40)	12,25	22,25	15,81	2,81	15

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve écrite

4.2 Répartition des notes des épreuves orales

Les caractéristiques descriptives de chaque épreuve orale des 75 candidats

Epreuve	Min	Max	Moyenne	Ecart-type	la médiane
Algèbre et géométrie (notes sur 80)	12,00	68,00	34,14	14,20	32,00
Analyse et probabilités (notes sur 80)	17,00	72,00	39,99	14,33	40,00
Modélisation et calcul scientifique (sur 80)	16,00	72,00	41,62	16,33	37,00
Total oral (note sur 240)	62,00	206,00	117,06	34,47	113,00

Les caractéristiques descriptives des notes à l'épreuve orale

4.2.1 Bilan des épreuves écrites et comparaison : de 2018 à 2022

Nous adoptons les abréviations suivantes :

- AG : Algèbre et Géométrie
- AP : Analyse et Probabilités
- MCS : Modélisation et Calcul Scientifique

Effectifs détaillés des candidats aux épreuves écrites de 2018 à 2022

Année	2018		2019		2020		2021		2022	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Inscrits	170	170	191	191	191	182	301	301	254	254
Présents	107	107	128	128	128	125	133	133	128	128
Absents	63	63	63	63	57	57	168	168	126	126

Effectifs des candidats aux épreuves écrites de 2018 à 2022

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières, des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2018		2019		2020		2021		2022	
Admissibles	70		65		64		84		75	
Epreuve	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP	MG	AP
Moyenne sur 20	7,28	8,14	6,8	7,64	6,87	8,42	7,22	7,90	7,71	8,09

La moyenne générale, des épreuves écrites par matières.

La moyenne générale des épreuves écrites des candidats marocains admissibles est comme suit :

Année	2018	2019	2020	2021	2022
Admissibles	70	65	64	84	75
Moyenne des épreuves sur 20	7,22	7,55	7,65	7,56	7,9

4.2.2 Bilan des épreuves orales et comparaison : de 2018 à 2022

La moyenne générale sur 80 des épreuves orales par matière des candidats admissibles est comme suit :

Année	2018			2019			2020			2021			2022		
Epreuve	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP
Présents	43	63	63	63	61	61	61	60	59	74	74	75	66	70	69
Moyenne sur 80	31,4	44,49	35,16	34,73	35,55	39,95	34,68	35,59	41,19	41,53	36,41	37,57	41,62	34,14	39,99

La moyenne générale des épreuves orales des candidats admissibles est comme suit:

Année	2018	2019	2020	2021	2022
Admissibles	63	65	64	84	75
Moyenne des épreuves sur 80	38,13	36,80	37,15	35,32	39,02

La moyenne générale des épreuves orales par matière des candidats admis est comme suit :

Année	2018			2019			2020			2021			2022		
Nombre d'admis	20			23			29			37			35		
Epreuve	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS	AG	AP	MCS
Moyenne sur 80	56,2	42,8	49,3	46,17	47,74	50,30	44,48	46,14	45,69	47,44	44,15	54,64	41,31	49,1	49,88

La moyenne générale (oral et écrit) des candidats admis est comme suit :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Admis	07	09	17	15	20	23	29	37	35
Moyenne des épreuves sur 80	45,09	46,81	44,29	47,47	42,72	43,48	45,44	43,12	42,16

Statistiques concernant les candidats admis

Résultats	Épreuves écrites			Épreuves orales				Total G	Moyenne G sur 20
Épreuve	MG	AP	Total E	AG	AP	MCS	Total O		
Min	23	21	53	19	20	24	108	173	8,65
Max	45	53	89	68	72	72	206	288	14,4
Moyenne	34,41	36,15	70,56	41,31	49,05	49,88	140,24	210,81	10,54

avec

- Total E est le total des épreuves écrites sur 160
- Total O est le total des épreuves orales sur 240
- Total G est le total général des épreuves écrites et orales sur 400
- Moyenne G est la moyenne générale des épreuves écrites et orales sur 20

4.3 Evolution du nombre de candidats

Tableau récapitulatif des candidats admis à l'agrégation de mathématiques depuis la création de l'agrégation

Année	Nombre de Candidats Marocains	Nombre de Candidats Admis
1988	8	3
1989	17	10
1990	29	16
1991	28	21
1992	27	24
1993	24	19
1994	24	19
1995	32	20
1996	36	20
1997	22	15
1998	28	11
1999	34	18
2000	37	13
2001	44	16
2002	38	16
2003	37	18
2004	34	14
2005	25	11
2006	38	08
2007	55	08
2008	64	16
2009	39	13
2010	28	02
2011	35	04
2012	77	06
2013	63	11
2014	61	07
2015	93	09
2016	47	17
2017	63	15
2018	107	20
2019	191	23
2020	182	29
2021	301	37
2022	254	35

Chapitre 5

Déroulement des épreuves orales

Ce chapitre précise l'organisation des épreuves orales, les attentes du jury et donne des conseils permettant la mise en valeur des compétences et de la motivation des candidats; les modalités des déroulements des examens oraux qui sont formalisées et structurées pour que les candidats puissent se préparer, effectuer efficacement leur prestation et être à l'aise aux épreuves orales.

5.1 Epreuve d'algèbre et géométrie

5.1.1 Modalités

Le candidat reçoit son enveloppe dans laquelle il y a deux sujets parmi une liste d'une cinquantaine de sujets connus à l'avance. Il choisit un des sujets et dispose de trois heures (3h) pour le préparer. Durant cette préparation le candidat peut utiliser les livres de la bibliothèque de l'agrégation mais n'a pas accès à l'Internet ni à aucun autre objet électronique.
Le candidat peut disposer de ses propres livres sous deux conditions :

- Les livres doivent être autorisés par le jury (en particulier ne pas être annotés) et
- Les livres doivent être déposés dans la salle de préparation pour être à la disposition de tous les candidats, pendant toute la durée de l'oral.

Le jury procède à la photocopie des plans préparés par les candidats qui doivent être manuscrits, comportent 3 pages $A4$ au maximum et possèdent une marge de $1cm$ sur tous les côtés afin d'éviter tout problème lors de la photocopie. Il est en conseillé de soigner la présentation du plan écrit, de mettre des titres, d'encadrer les formules, etc.. Les plans peuvent être complétés par une quatrième page consacrée aux figures. Il faut noter clairement, sur le plan, les développements proposés. Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve et pourra utiliser les notes manuscrites qu'il avait produit durant la préparation.
L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale d'un maximum de 60 minutes environ: une présentation du plan de 10 minutes, un développement de 20 minutes maximum et enfin une partie consacrée aux questions des membres de jury.

Première partie : présentation du plan

Le candidat est convié à utiliser son temps de parole (10 minutes maximum) pour présenter, argumenter et faire une synthèse de son plan. Ce dernier doit être bien structuré: il définit avec précision les notions introduites, donne les énoncés complets des résultats fondamentaux et cite des exemples et des applications. Comme le jury possède une copie du texte, il est inutile de recopier le plan au tableau. Toutefois il peut être pertinent d'utiliser le tableau pour écrire l'architecture du plan, les théorèmes importants ou un exemple significatif, voire faire un dessin. Le candidat peut faire un bref exposé introductif et commenter utilement ensuite les résultats principaux, les outils développés, l'organisation d'ensemble et les méthodes utilisées. La présentation orale, l'organisation et la cohérence globale du plan écrit constituent des éléments importants d'appréciation.

Deuxième partie : le développement

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est important que le candidat propose au moins deux développements en adéquation avec la leçon, et qui soient compatibles avec le programme de l'agrégation. Les résultats utilisés pour mener à bien le développement doivent être clairement cités dans le plan présenté par le candidat. Le souci pédagogique, la pertinence des explications, la capacité à mener à bien et complètement le développement dans le temps imparti sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Les résultats utilisés pour mener à bien le développement doivent être clairement cités dans le plan présenté par le candidat.

Troisième partie : questions des membres du jury

Le jury vérifie systématiquement la maîtrise du plan presenté. Une part importante de la discussion sera autour du plan. Le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui pose eventuellement des exercices en rapport avec la leçon afin d'apprècier la qualité de son raisonnement et son analyse. Les réponses aux questions, l'utilisation du plan écrit et l'écoute dont le candidat fait preuve sont des éléments importants de notation.

5.1.2 Remarques et recommandations

Notons d'abord que les candidats ayant choisi des sujets d'algèbre linéaire sont beaucoup plus nombreux que ceux qui ont choisi des sujets portant sur les structures d'anneaux et de corps. Sur le déroulement de l'épreuve orale d'algèbre et géométrie, le jury tient à signaler les remarques suivantes:

- Le plan: En général, la duré impartie (10 minutes) a été respectée. Par contre, plusieurs candidats n'ont pas bien sturcturé le plan. Le jury a aussi constaté une carence au niveau des exemples et des applications.
- Certains candidats ont proposé des développements non consistants ou en dehors de la leçon choisie. Le jury a été amené de demander aux candidats, n'ayant pas respecté le temps prévu pour le développement, de décrire oralement les étapes restantes de la démonstration.
- Questions des membres du jury: Certains candidats ont consacré plus temps au développement au détriment de la maitrise de la leçon et parfois même au détriment des notions les plus basiques relatives au sujet.

D'autre part, le jury a constaté que les étudiants admis ont un bon niveau en Algèbre et Géométrie. Par ailleurs, il recommande aux candidats de:

- Présenter un plan bien structuré (respecter l'enchainement des paragraphes, éviter les répétitions) et bien riche (présenter les notions de base relatives à la leçon, les résultats fondamentaux, donner des exemples et des applications)
- Proposer au moins deux développement bien solides et en relation étroite avec la leçon (éviter les développements passe-partout). Veiller à l'aboutissement du développement et le respect de la durée accordée, le cas échéant le candidat est automatiquement pénalisé.

- Eviter d'admettre des résultats majeurs dans le plan qui, une fois acquit l'objet du développement devient trivial et dépourvu de toute importance.
- Montrer une maitrise de la leçon et veiller à répondre et avec rigueur aux questions posées par le jury.

5.2 Epreuve d'analyse et probabilités :

5.2.1 Modalités

Les modalités pratiques sont les mêmes que celles de l'oral d'Algèbre et Géométrie. L'épreuve orale d'analyse et probabilités dure au maximum une heure et est composée de trois parties. La première, durant laquelle le candidat présente le plan de la leçon, est prévue en 10 minutes au maximum. Dans la deuxième phase le candidat doit proposer au moins deux développements et qu'il soit en mesure de les mener à bien dans les 20 minutes consacrées à cette partie. Le candidat doit aussi être capable de justifier toutes les étapes et de donner des explications sur l'approche adoptée ainsi que des exemples illustrants les notions développées. Les trente minutes restantes sont consacrées à l'entretien avec le jury qu'il a pour objectif de s'assurer de la maîtrise par le candidat du plan présenté et des outils de bases utilisés dans son développement et de vérifier sa capacité à bien réagir à des questions en lien avec le sujet de la leçon. Dans cette dernière étape de l'épreuve, le candidat doit donc se préparer à des questions sur tout énoncé présenté dans son plan ainsi qu'aux questions sur des applications de son développement. Questions auxquelles il doit répondre avec précision. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier du résultat général présenté dans son développement. Pour cela il doit mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et aussi réfléchir à des exemples ou des contre-exemples lors de sa préparation.

5.2.2 Remarques et recommandations

Le jury a constaté une progression du niveau de certains candidats que ce soit au niveau de la présentation ou lors des réponses aux questions. Les meilleurs candidats ont su faire preuve d'une bonne connaissance des outils mathématiques utilisés ainsi que d'une démarche réfléchie et lucide lors de leur passage. Le jury a été sensible à l'effort important fourni par quelque candidats et par l'originalité des développements qu'ils ont proposé. Nous recommandons aux candidats de consulter les différents rapports du jury de l'agrégation.

5.3 Epreuve de modélisation et calcul scientifique :

5.3.1 Modalités

L'épreuve orale de modélisation est préparée par le candidat en quatre heures et dure environ une heure. Le candidat a le choix entre un texte et une leçon.

Première partie : présentation du plan

Le candidat dispose de dix minutes pour présenter son plan en y précisant les points qu'il propose comme développements éventuels. Il est vivement souhaitable que le candidat propose au moins deux développements. Le délai de dix minutes a été en général respecté par les candidats. La majorité d'entre eux a choisi le texte. Le jury a toutefois relevé que certains candidats manquent de rigueur et de clarté dans les plans qu'ils présentent. Il a aussi constaté que la tendance générale est de présenter un seul développement.

Deuxième partie : le développement

Le développement choisi par le jury doit être présenté en 20 mn durant lesquelles le candidat n'est pas interrompu. Le jury a remarqué que ce délai n'est pas respecté par quelques candidats, soit parce que le développement proposé manque de consistance, auquel cas il est traité en moins de dix minutes, soit parce que le développement est mal maîtrisé par le candidat, et dans ce cas il y a un dépassement du temps accordées. Le jury est amené alors à demander au candidat de conclure, ce qui le pénalise.
Une spécificité importante de l'épreuve de modélisation est que le candidat est tenu de présenter un développement informatique en relation avec le texte ou la leçon choisi.

Troisième partie : questions des membres du jury

La troisième phase de l'épreuve est réservée aux discussions et interrogations des membres de la commission. Ce moment d'interaction offre au jury l'occasion de

1. s'assurer de la bonne maîtrise du thème que le candidat a proposé comme développement et de discuter de son lien avec le texte, ou la leçon, choisi,
2. tester à quel point le candidat maitrise les concepts présentés dans son plan,
3. poser des questions en relation directe avec le texte ou la leçon choisi par le candidat. Ces questions concernent aussi les éventuels développements informatiques présentés par le candidat.

5.3.2 Remarques et recommandations

Pour les remarques d'ordre général sur le déroulement de l'épreuve orale de modélisation, la commission soulève les points suivants :

1. Un bon nombre de candidats ne propose aucun développement informatique et se contente de proposer un développement théorique.
2. Certains candidats proposent un seul développement au jury. Dans le cas où ils en proposent deux, l'un des deux sujets manque de consistance.
3. Il est préférable de traiter une portion du texte en se basant sur des arguments mathématiques solides et des simulations pertinentes que de traiter l'integralité du texte de manière vague.

Chapitre 6

Listes des leçons

Les listes des leçons sont données à titre indicatif : le jury se réserve le droit de proposer d'autres leçons ou de changer la formulation des leçons figurant sur les listes. Il est conseillé aux candidats de lire avec la plus grande attention l'intitulé de la leçon.

6.1 Liste des leçons d'Algèbre et Géométrie

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
3. Sous-groupes distingués et de groupes quotients. Exemples et applications.
4. Groupes finis. Exemples et applications.
5. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
6. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
7. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
8. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Applications.
9. Nombres premiers. Applications.
10. Anneaux principaux. Applications.
11. Corps finis. Applications.
12. Extensions de corps. Exemples et applications.
13. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
14. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
15. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
16. Actions de groupes sur les espaces de matrices. Exemples et applications.
17. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang.
18. Déterminant. Exemples et applications.

19. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
20. Sous-espaces stables par une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
21. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
22. Exponentielle de matrices. Applications.
23. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
24. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
25. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
26. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
27. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
28. Formes quadratiques réelles. Coniques . Exemples et applications.
29. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
30. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
31. Groupes abéliens finis.
32. Sous-groupes finis de $O^+(2)$ et $O^+(3)$.
33. Matrices équivalentes et semblables.
34. Résolution d'un système d'équations linéaires. Algorithmes et complexité.
35. Groupes quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.
36. Espaces vectoriels quotients finis et théorèmes d'isomorphismes.

6.2 Liste des Leçons d'Analyse et Probabilités

1. Espaces de fonctions : exemples et applications.
2. Exemples de parties denses et applications.
3. Utilisation de la notion de compacité.
4. Convexité, Connexité. Exemples et applications.
5. Espaces complets. Exemples et applications.
6. Théorèmes du point fixe. Exemples et applications.
7. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
8. Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

9. Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonometriques. Exemples et applications.
10. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.
11. Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Exemples et applications
12. Applications des formules de TAYLOR.
13. Problèmes d'extremums. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications
14. Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.
15. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
16. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
17. Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.
18. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.
19. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.
20. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
21. Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.
22. Espaces L^p ,$1 \leq p \leq +\infty$.
23. Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.
24. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
25. Produit de convolution, transformation de FOURIER. Applications.
26. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
27. Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
28. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.
29. Séries de FOURIER. Exemples et applications.
30. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.
31. Loi des grands nombres. Théorème central limite. Applications.
32. Fonctions de répartitions. Proriétés et applications.
33. Fonctions caractéristiques. Proriétés et applications.
34. Modes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence en loi, convergence en probabilité et convergence presque sûr).
35. Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.
36. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

6.3 Liste des Leçons de Modélisation et Calcul Scientifique

1. Appliquer et comparer des méthodes numériques de recherche de valeurs et vecteurs propres. Applications.
2. Conditionnement d'un système linéaire ou d'un problème de valeurs propres. Exemples.
3. Exemple de résolution exacte ou approchée de systèmes d'équations linéaires et comparaison des méthodes.
4. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations et de systèmes d'équations non linéaires.
5. Approximation et interpolation de fonctions. Applications.
6. Utiliser et comparer des méthodes de factorisation et de recherche des racines d'un polynôme.
7. Problèmes de dénombrement et de localisation des zéros d'un polynôme. Exemples.
8. Méthodes pour le calcul exact ou approché d'intégrales simples et multiples. Applications.
9. Appliquer et comparer des méthodes de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles ou de systèmes d'équations différentielles.
10. Méthodes de résolution d'un problème de minimisation d'une fonction d'une ou plusieurs variable(s) réelle(s). Applications.
11. Étude sur des exemples de la rapidité de convergence d'une suite ou d'une série de réels. Calcul approché de la limite ou de la somme.
12. PGCD, PPCM, Théorème de Bezout, algorithmes de calcul. Applications.
13. Méthodes de moindres carrés. Applications.
14. Puissance entière d'une matrice carré. Comportement asymptotique. Exemples et applications.

Thèmes des textes de l'épreuve de Modélisation et calcul scientifique

L'épreuve de modélisation et calcul scientifique porte sur le programme général de l'agrégation, ainsi que sur le programme spécifique développé ci dessous :

1. Calcul numérique et symbolique : simulation, intégration, différentiation, sommation et intégration, résolution d'équations algébriques ou différentielles.
2. Méthodes numériques pour les équations linéaires. Conditionnement. Factorisation LU. Méthode du gradient pour systèmes d'équations linéaires symétriques définis positifs. Recherche de valeurs propres (méthode de la puissance). Moindres carrés linéaires, sans contraintes.
3. Résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton. Vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
4. Intégration numérique à une variable. Rectangles, trapèzes, Simpson. Estimation de l'erreur. Equations différentielles ordinaires. Méthodes d'Euler explicite et implicite. Consistance, stabilité, convergence, ordre. Utilisation de la méthode de Runge-Kutta4.Méthode de Monte-Carlo. Vitesse de convergence. Applications au calcul approché d'intégrales multiples.

5. Optimisation : extremums de fonctions réelles d'un nombre fini de variables réelles. Multiplicateurs de Lagrange. Algorithme du gradient à pas constant.

6. Probabilités. Lois de Variables aléatoires discrètes et à densité. Méthodes de simulation de variables aléatoires de lois données, en particulier pour les lois classiques : binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, gaussienne, gamma.

7. Chaines de Markov homogènes à espace d'états fini. Irréductibilité, apériodicité. Classification des états. Convergence.

8. Calcul matriciel : Opérations élémentaires sur lignes et sur colonnes. Méthode du pivot de Gauss. Matrices à coefficients entiers. Application aux systèmes linéaires sur $\mathbb{Z}$ et aux groupes abéliens de type fini.

9. Polynôme à une indéterminée. Evaluation (Horner). Interpolation (Lagrange). Localisation des racines dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}$.

Chapitre 7

Textes de l'épreuve de modélisation

L'oral du concours de l'Agrégation Marocaine de Mathématique comporte trois épreuves, l'une portant principalement sur les domaines Algèbre-Géométrie, la deuxième principalement sur les domaines Analyse-Probabilités, la troisième sur les problèmes de Modélisation Mathématique. Cette dernière épreuve s'appuie sur des connaissances générales d'Algèbre-Géométrie-Analyse-Probabilités mais elle diffère fondamentalement des deux premières :

- par les objectifs : il s'agit d'étudier des situations concrètes, de réfléchir aux diverses possibilités de traduire mathématiquement une telle situation et de proposer des solutions adaptées
- par la forme de l'épreuve : le candidat tire un sujet contenant un texte scientifique (avec des pistes de réflexion) et un intitulé de leçon de calcul scientifique ou formel (orienté vers la modélisation). Il choisit le texte ou la leçon et dispose de quatre heures pour préparer son passage devant le jury.
- par les outils mis à sa disposition pendant les quatre heures de préparation : le candidat travaille à l'aide des livres de la bibliothèque de l'Agrégation ou de ses propres livres s'ils sont autorisés par le jury. Il dispose aussi d'un ordinateur équipé de divers logiciels mathématiques.

À l'issue de sa préparation, le candidat présente les fruits de sa réflexion au jury, pendant environ une heure et quart. On attend de lui qu'il

1. présente la modèlisation mis en oeuvre dans le texte ou la leçon, ce qu'il en a compris
2. détaille certains résultats mathématiques utiles pour le sujet étudié
3. discute les hypothèses introduites par le texte ou les hypothèses choisies pour la leçon
4. montre l'exploitation possible du sujet dans une séquence pédagogique (on peut penser aux TIPE des classes préparatoires, aux travaux personnels des classes terminales de lycées)
5. présente un ou plusieurs programmes informatiques qui sont utiles dans la résolution de problèmes introduits par le sujet et qui illustrent les résultats obtenus

Lors des vingt dernières minutes de l'interrogation orale, le jury pose des questions diverses en relation avec le sujet. Il peut revenir sur des points peu clairs de la présentation ou proposer d'autres approches de la situation étudiée, d'autres pistes de travail.

Lors des oraux de Modélisation Mathématique 2016 le jury a noté que

- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.
- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a,b] \times [c,d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$\left[a+\frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a+\frac{(i+1/2)(b-a)}{n}\right] \times \left[c+\frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c+\frac{(j+1/2)(d-c)}{p}\right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers (i, j). Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0, 255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple (RGB= red, green, blue).

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice M carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où n_k est le nombre de pixels d'intensité

k (i.e. de termes de M valant k). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des (i, j) où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image M. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec M carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$. Comprimer une image M consiste à la remplacer par une autre image M' proche de M - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle A de taille n, p, il existe des matrices orthogonales U, V_t et une matrice D de taille n, p telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec U, V unitaires et D respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les k derniers sont 0 cela signifie que le rang de A est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où D' est obtenue en remplaçant dans D les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de M. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si M est d'ordre 512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4 \times 256^2 + 256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et

$\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.
On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} A$ désigne est le noyau de A, $\operatorname{Im} A$ l'image de A. Le noyau de A est $\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$, noté $\operatorname{Ker} A$, l'image de A est $\{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$, notée $\operatorname{Im} A$. On note $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
I.1. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.
I.2. Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
I.1.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.

b) Si W est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de λ et $\| W \|_p$.

c) En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.

I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.

c) En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.

I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.
I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$.
Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.

a) Montrer que λ_1 est non nul.

On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$.

c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{ r + 1, \ldots, p \}$, $AV_i = 0$.

d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{\, r+1, \dots, n \,\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le i$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le j$^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la i$^{\text{ème}}$ ligne, j$^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\},\ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \ \text{ où } \ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i{}^{\mathrm{t}}E_i$.

b) En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A{}^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^{\mathrm{t}}U_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \dots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \dots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^{\mathrm{t}}U$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.
2. Déterminer $(A_0^+)^+$.
3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.
4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ...) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :
En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdim

fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

```
z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
```

On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de A^+, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de A. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.
- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.
- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.
- Que donne la SVD de A si A est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intérêt de modèles numériques pour les images?
- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.
- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.
- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image I en une image I' pratiquement similaire à I mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).

- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont
- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point M intérieur au solide la température en M est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en M (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit G un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière et soit φ une fonction continue de ∂G dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue f de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(a) $\forall x \in G, \quad \forall r \in]0, dist(x, \partial G)[, \quad f(x) = \int_{|y|\leq r} f(x+y)dy$
(b) $\forall x \in \partial G, \quad f(x) = \varphi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP où intervient le laplacien de f, $\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

Theorem 7.2.1 *Une fonction f est solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord h si et seulement si elle est de classe C^2 sur G, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine G et sa frontière, l'existence ou l'unicité de f, solution du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array} \right.$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier où existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant

Theorem 7.2.2 *Le problème de Dirichlet sur la boule $B(0,r)$ avec condition au bord φ est donnée par*

$$f(x) = \int_{\partial[B(0,r)]} \varphi(z) \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r(dz)$$

où m_r est la mesure uniforme sur la sphère $S(0,r) = \partial[B(0,r)]$ de masse μ_r choisie pour avoir $\displaystyle\int_{\partial[B(0,r)]} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d} m_r$
1.

La valeur de la solution en x est une moyenne des valeurs de h relativement à une probabilité dépendant de x portée par la sphère $S(0,r)$. La fonction densité $z \mapsto \dfrac{r^2 - \|x\|^2}{\|z-x\|^d}$ est appelée noyau de Poisson.

Dans le cas d'un domaine G non borné il faut des conditions supplémentaires pour obtenir existence ou unicité d'une solution. Un cas simple à traiter est celui de $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ pour lequel la solution est donnée par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \frac{x_2}{(x_1 - z)^2 + x_2^2} dz$$

La probabilité portée par la frontière de G est ici la loi de Cauchy translatée en x.

7.2.2 Méthodes numériques de résolution

Déterministe

On discrétise l'espace, notant $h > 0$ le pas de discrétisation, notant $\sim_h$ la relation de voisinage :

$$\forall (x,y) \in h\mathbb{Z}^d, \quad x \sim_h y \Leftrightarrow \|y - x\| = h$$

posant $G_h = G \cap h\mathbb{Z}^d$ et $\partial_h G = \{x \in h\mathbb{Z}^d \setminus G_h, \ \ \exists y \in G_h, \ x \sim_h y\}$.
Le laplacien discret est donné par $\Delta_h f(x) = \dfrac{1}{2d} \displaystyle\sum_{y \sim_h x} f(y) - f(x)$.
Remarquer que $\Delta_h f(x) = 0$ équivaut à $f(x) =$ moyenne uniforme de f sur le voisinage de x, ce qui confirme le lien entre les propriétés (a) et (b) du paragraphe précédent.
Le problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est remplacé par sa version discrète :
chercher f_h définie sur $G_h \cup \partial_h G$ telle que $\begin{cases} (1) \forall x \in G_h, \quad \Delta_h(f)(x) = 0 \\ (2) \forall x \in \partial_h G, \ f(x) = \varphi_h(x) \end{cases}$
avec $\varphi_h(x) =$ valeur moyenne de φ sur $\partial_h G \cap [x-h, x+h]^d$.
Il s'agit maintenant de résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, $n = card(G_h)$. On dispose pour ce faire de diverses méthodes numériques. On essaye en général de tirer profit de la remarque suivante : la matrice $n \times n$ du système linéaire est une matrice-bande, propriété qui est conséquence du caractère local de l'opérateur différentiel laplacien.
La méthode de discrétisation est intéressante parce qu'on dispose d'un résultat de convergence de la solution du problème discrétisé vers la solution du problème initial, lorsque h tend vers 0^+.

Stochastique

On utilise ici le processus W, mouvement brownien $d-$ dimesionnel, dont le générateur infinitésimal est, au facteur -1/2 près, le laplacien. On montre en utilisant la formule d'Ito que la solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ est donnée par

$$(3) \qquad f(x) = \mathbb{E}(\varphi(X(\tau_G)))$$

où $X(t) = x + W(t)$ et $\tau_G = \min\{t \geq 0, \quad X(t) \in \partial G\}$ (le temps d'atteinte de la frontière ∂G.
Ici aussi on utilise couramment des méthodes de calcul numériques en partant d'une discrétisation de l'espace et en remplaçant le mouvement brownien par une marche aléatoire. Pour définir la marche aléatoire X_h partant de $x \in G_h$ (qui remplace le processus $X(t) = x + W(t)$ évoqué plus haut)

- on considère $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante et équidistribuée de vecteurs aléatoires telle que
$$\forall(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) \in \{-1, +1\}^d, \quad \mathbb{P}(Y_j = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d) = \frac{1}{2d}$$
- on pose, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $X_h(k) = x + \sum_{j=1}^{k} Y_j$.

C'est la marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins.
La fonction $x \mapsto \mathbb{E}(\varphi(X_h(\tau_{G_h})))$ où $\tau_{G_h} = \min\{k \geq 0, \quad X(t) \in \partial G_h\}$ est une solution approchée du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord φ, elle converge vers la solution f donnée par (3) lorsque h tend vers 0^+.
Pour calculer cette solution approchée numériquement on utilise la loi des grands nombres, en répétant la simulation de marches aléatoires un grand nombre de fois (méthode de Monte Carlo). Noter que le nombre de variables indépendantes Y_j qu'il est nécessaire de simuler est toujours fini, puisqu'on arrête la marche aléatoire X_h dès qu'elle atteint la frontière de G. Ceci permet d'obtenir des solutions approchées en temps raisonnable.

7.2.3 Un extrait de sujet posé en concours CPGE

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$.
- $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).
- On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $u\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ est une application de classe C^2 sur louvert Ω, on rappelle que le laplacien de u est l' application $\Delta u = \partial_{1,1}u + \partial_{2,2}u$.
- Une application $v\ :\ \Omega \to R$ est dite harmonique (sur Ω) si v est de classe C^2 sur Ω avec $\Delta v(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$.
- Pour $(x,y) \in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x + iy$ et on pose pour t réel
$$N(x,y,t) = \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} = \frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos(t))^2+(y-\sin(t))^2} \qquad \text{(quand l'expression a un sens)}$$

Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f\ :\ C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.
Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f, consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$. On définit en outre l'application
$$N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t) f(\cos(t), \sin(t))\, dt$$
sur $D(0,1)$ et l'application $u(x,y) = \begin{cases} N_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$ sur $\bar{D}(0,1)$.

1. a. Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{1,1}N_f$ dordre 2 par rapport à x.
   De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles dordre 2 par rapport a toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$. Ce résultat est admis pour la suite. Exprimer, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, pour tout $(i,j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{i,j}N_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{i,j}N(x,y,t)$.
   b. En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

2. On fixe $t_0 \in [0,2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi]/\ \|(\cos(t),\sin(t)) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \delta\}$$

   a. Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints.
   b. Montrer l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left| \int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

   c. Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x,y,t)| \leq 4\frac{1-(x^2+y^2)}{\delta^2}$$

   d. En déduire que, pour tout $\delta > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, si $\|(x,y) - (\cos(t_0),\sin(t_0))\|_2 \leq \eta$, alors

$$\left| \int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos(t),\sin(t)) - f(\cos(t_0),\sin(t_0)))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Conclusion?

4. (résumée) Montrer que si f est nulle sur $C(0,1)$ alors u est nulle sur $D(0,1)$. Conclusion?

7.2.4 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

On peut s'intéresser à la démonstration des résultats théoriques présentés.
Pour les résultats d'existence / unicité on peut s'inspirer du sujet de concours inclus dans ce texte.
Pour l'utilisation de processus X comme le mouvement brownien (en temps continu) ou la marche aléatoire symétrique (en temps discret) on peut relier la propriété $(f(X_t))_t$ est une martingale et la propriété f harmonique.
La méthode numérique probabiliste s'appuie sur le temps d'atteinte de la frontière du domaine G. Il est sous entendu dans le texte qu'il est bien défini et à valeurs finies, presque sûrement. Comment prouver ces assertions?
Pour le résultat d'unicité de la solution du problème de Dirichlet ou pour l'étude des fonctions harmoniques, une méthode bien connue exploite le principe du maximum. Rappeler l'énoncé de ce principe et montrer comment il peut être utilisé.

Aspect modélisation calcul numérique et algorithmique

Commenter les hypothèses du modèle. Quel modèle, quelles équations peut on proposer dans le cas où le solide possède des sources de chaleur internes?
La méthode numérique déterministe s'appuie sur la résolution de systèmes linéaires de grandes tailles. Quels sont algorithmes peuvent être efficaces pour cet objectif et comment exploiter la propriété de la matrice des coefficients qui est une matrice bande?
Illustrer sur des exemples la rapidité de convergence de méthodes numériques pour la résolution de systèmes linéaires dans le cas de matrices bandes.
Simuler la marche aléatoire symétrique au plus proche voisin. On peut commencer par le cas de la dimension 1, i.e. le jeu de pile-face.
Utiliser cette simulation pour observer le temps d'atteinte fini de la frontière. Et aussi pour fournir une solution approchée du problème de Dirichlet.

7.3 Texte 3 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.3.1 Introduction, modélisation de gestion de stock

Une entreprise qui vend un certain produit voudrait décider combien d'articles du produit devrait avoir en stock pour chacun des n prochains mois. Les intervalles de temps entre les instants de deux demandes successives sont des quantités positives, aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités supposée exponentielle de moyenne $\lambda = 0.1$ mois. Les demandes sont des quantités aléatoires indépendantes qui obéissent à une même loi de probabilités sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On suppose que cette loi, notée $(d(k))_{k\in E}$, est donnée par $d(1) = d(4) = 1/6$ et $d(2) = d(3) = 1/3$. Au début de chaque mois, l'entreprise vérifie le niveau I de son stock du produit et décide combien d'articles à commander auprès de son fournisseur. Si l'entreprise commande Z articles, elle encourt un coût $C = K + iZ$, où $K = 32\$$ est le coût d'installation et $i = 3\$$ est le coût incrémental par article commandé (si $Z = 0$, aucun coût n'est encouru). Quand une commande est formulée, le temps nécessaire pour qu'elle arrive à l'entreprise (temps de livraison) est uniformément distribué entre 0.5 et 1 mois.
L'entreprise adopte une stratérie, notée (s, S), pour alimenter son stock et décide une commande Z selon le schéma suivant:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{si } \quad I < s \\ 0 & \text{si } \quad I \geq s \end{cases}$$

où $(s, S) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ avec $s < S$.
Lorsqu'une demande D est formulée par un client, elle est immédiatement satisfaite si le niveau du stock I est supérieur ou égal à D (i.e. $I \geq D$). Si la demande D excède le niveau du stock I (i.e. $I < D$), l'excès $\Delta = D - I$ est mis en arriérée (en déficite) et sera satisfait par les livraisons futures. Dans le cas où $\Delta > 0$, le niveau du stock I devient théoriquement négatif ($I = -\Delta$). Lorsqu'une livraison est arrivée, elle est d'abord utilisée pour absorber les arriérées et ensuite, s'il en reste, elle alimente le stock.
Soit $I(t)$ le niveau du stock à l'instant t. Notons $I^+(t)$ et $I^-(t)$ les quantités $\max(I(t), 0)$ et $= \max(-I(t), 0)$ respectivement. Pour une période de n mois ($n \in \mathbb{N}^*$), considérons les quantités $A^+(n)$ et $A^-(n)$ définies

par

$$A^+(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^+(t)dt \qquad \text{et} \qquad A^-(n) = \frac{1}{n}\int_0^n I^-(t)dt.$$

Supposons que l'entreprise encourt deux autres coûts: un coût de maintien noté m et un coût de l'arriérée noté a. Le coût $m = 1\$$, par article par mois, inclut la location du magasin (entrepot), l'assurance, la maintenance, etc. et le coût des arriérées, quand elles existent, $a = 5\$$ par article manquant par mois.

7.3.2 Données pour comparaison de stratégies de stock

Supposons qu'à l'instant 0, aucune demande n'est formulée et que $I(0) = 60$.
On simule le comportement du stock pour $n = 120$ mois et on compare le coût total moyen par mois CTM (somme des différents coûts moyens par mois) pour chacune des 9 stratégies de stockage données dans la table (**Table 1.**) suivante:

s	20	20	20	20	40	40	40	60	60
S	40	60	80	100	60	80	100	80	100

Table 1. Différentes stratégies (s, S)

7.3.3 Quelques outils probabilistes

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.

Définition

La densité de probabilité f d'une variable aléatoire réelle X qui obéit à une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$ (notation: $X \sim Exp(\alpha)$) est définie par

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} 1\!\!1_{[0,+\infty[}(x), \;\; x \in I\!\!R,$$

où la notation $1\!\!1_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.
La fonction de répartition de cette loi exponentielle est donnée par

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx = 1 - e^{-\alpha t}, \quad t \in I\!\!R$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F continue. La variable aléatoire réelle Y définie par $Y = F(X)$ obéit à une loi de probabilité uniforme sur $]0, 1[$.

Inverse généralisé de F

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. La fonction inverse généralisée F^- de F est définie par:

$$F^-(u) = \inf\{x \in I\!\!R / F(x) \geq u\}, \quad u \in]0, 1[$$

Remarque

Si F est inversible, alors $F^- = F^{-1}$.

Exemples

1)− Pour une variable aléatoire exponentielle $X \sim Exp(\alpha)$, nous avons

$$F^{-}(u) = F^{-1}(u) = \frac{-ln(1-u)}{\alpha}, \qquad u \in]0,1[\tag{7.3.2}$$

2)− Pour une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = I\!P(X = x_k),\ k = 1, 2, \ldots$, nous avons, pour une réalisation uniforme $u \in]0,1[$,

$$(2) \begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{alors} \quad F^{-}(u) = x_1 \\ \text{Sinon } F^{-}(u) = x_k & \text{telle que} \quad \left(\sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

7.3.4 Outils informatiques

La simulation Monte Carlo, d'un modèle aléatoire, utilise une suite $u_k,\ k = 1, 2, \cdots$, de réalisations de la loi uniforme sur $]0,1[$. On **admet** qu'une telle suite peut être produite par une machine informatique par le biais d'une fonction dite générateur de nombres aléatoires. Par exemple, en langage C, l'appel de la fonction $rand()$ donne un nombre entier entre 1 et une grande constante entière positive $RAND\_MAX$, d'où la division $u = (float)rand()/RAND\_MAX$ donne un réel $u \in]0,1[$ que l'on prend comme une réalisation de la loi uniforme sur $]0,1[$. Généralement les langages informatiques dédiés au calcul scientifique sont dotés de générateurs de nombres aléatoires.

7.3.5 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

1)− Proposer une preuve pour le théorème donné dans le paragraphe
"Quelques outils probabilistes".

2)− Déterminer le lien entre le paramètre λ défini dans la section I et le paramètre α défini dans la section III.

3)− Soit $t > 0$. Exprimer $I^{+}(t)$ en fonction des instants $t_k \in [0,t]$ et des demandes D_k formulées aux instants t_k.

4)− Que modélisent les quantités suivantes (quand elles existent):

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} A^{+}(n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} A^{-}(n).$$

5)− Expliciter la loi de probabilités du temps de livraison et discuter l'importance du support de cette loi.

Aspect enseignement

1)– Proposer d'autres types de coût et montrer comment peut-on les inclure dans le modèle proposé.

2)– Peut-on spécifier la loi de la demande en proposant par exemple une loi binômiale ou une loi de Poisson. Qu'est ce qu'on doit préciser dans le texte concernant chacune de ces deux lois proposées. Peut-on proposer une loi normale pour la demande?

3)– Discuter la possibilité de passer la commandea à tout instant voulu, au lieu que ça soit uniquement au début de chaque mois.

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1)– Peut-on construire théoriquement une suite de nombres aléatoires ? (donner des ingrédients justifiant votre réponse).

2)– Proposer un procédé mathématique qui peut jouer le rôle d'un générateur de nombres aléatoires.

3)– Comment peut-on vérifier que l'algorithme suivant permet de générer une réalisation x de X dont la fonction de répartition est F:

Etape 1: générer u uniforme dans $]0, 1[$ (par un générateur de nombres aléatoires)
Etape 2: prendre $x = F^{-}(u)$

4)– Pour une stratégie $(s, S) = (30, 90)$, proposer une réalisation possible de $I(t)$, durant les 3 premiers mois, pendant laquelle figurent des arriérées en traçant les courbes de $I(t)$, $I^{+}(t)$ et $I^{-}(t)$.

5)– Interpréter les quantités $mA^{+}(n)$ et $aA^{-}(n)$.

6)– Comment réalise-t-on l'indépendance entre deux variables aléatoires dans un programme informatique.

7)– Justifier le fait qu'on peut remplaçer $ln(1-u)$ par $ln(u)$ dans la formule (7.3.2).

8) Ecrire un algorithme détaillé et clair qui permet de simuler le modèle aléatoire utilisé pour la gestion du stock de l'entreprise puis le traduire dans un langage de programmation (en C par exemple) que vous exécutez sur machine. L'algorithme doit aboutir à la comparaison des 9 stratégies proposées dans le tableau des données (**Table 1.**) en calculant toutes les quantités utiles à cette comparaison.
Vous présenter les résultats de l'execution dans des tableaux et/ou sous formes graphiques (les graphiques sont plus sollicités). Commentez les résultats obtenus.

7.4 Texte 4 de l'épreuve de modélisation

Simulation informatique de certaines lois de variables aléatoires usuelles

De multiples applications : simulation de phénomènes physiques, méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales complexes, algorithmes probabilistes parmi autres applications, sont le fruit de la simulation informatique du hasard. Cette simulation est, en général, basée sur la construction d'un générateur de nombres aléatoires et la plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En `Python` par exemple, après avoir importer la classe `random`

```
>>> from random import *
```

la fonction

```
>>> choice([0,1])
```

permet de générer un nombre aléatoire parmi 0 ou 1 et de manière équiprobable. Ce qui permet de simuler un jeu équitable de Pile ou Face. Si on fait appel à cette fonction du hasard `choice([0,1])` un certain nombre de fois et on appelle X_n la valeur obtenue au n-ème appel, on obtient ainsi une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. La variable aléatoire

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} X_n \tag{1}$$

suit alors la loi uniforme sur $[0,1]$. Ce qui permet alors de faire une simulation de loi uniforme sur $[0,1]$ sans oublier que l'on ne peut pas pratiquement aller jusqu'à l'infini pour obtenir la valeur de U. Il faut alors procéder à des approximations. Toutefois, il est possible d'obtenir cette valeur directement par `Python`

```
>>> import random
>>> random.uniform(0,1)
```

La valeur retournée est de 16 chiffres après la virgule. Ce serait intéressant si on pouvait simuler d'autres variables aléatoires classiques telles que celles suivant la loi de Laplace ou la loi normale. Ces deux dernières lois ont les propriétés d'avoir des densités de probabilités continues et strictement positives sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Nous allons nous intéresser donc à des variables aléatoires vérifiant ces propriétés. On se place donc dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on désigne par :

- $I =]a,b[$ un intervalle non vide, borné ou non, de $\mathbb{R}$,
- X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de fonction de répartition F admettant une densité de probabilité f continue et strictement positive sur I,
- U une variable aléatoire indépendante de X et suit une loi uniforme sur $]0,1[$,
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0,1]$.

On introduit la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in I,\ \Psi(x) = \mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)]\right)$$

et on laisse au lecteur le soin de vérifier la validité de certaines propriétés relatives aux notations introduites ci-dessus.

Proposition 1 Les fonctions M et m définies sur I^2 par :

$$\forall\, (x,y) \in I^2,\ M(x,y) = \max_{t\in[0,1]} h(tx + (1-t)y) \quad \text{et} \quad m(x,y) = \min_{t\in[0,1]} h(tx + (1-t)y) \tag{2}$$

sont continues sur I^2.

Ces fonctions permettent de donner un encadrement du taux d'accroissement de la fonction Ψ :

Proposition 2 Soient M et m les deux fonctions introduites dans la proposition 2. Alors, pour tous x et y de I tels que $x < y$, on a

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} m(x,y) \leqslant \frac{\Psi(y)-\Psi(x)}{y-x} \leqslant \frac{F(y)-F(x)}{y-x} M(x,y). \tag{3}$$

Les inégalités (3) peuvent être obtenues en comparant, d'un point de vue inclusion, les événements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)], \quad [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)] \quad \text{et} \quad [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant m(x,y)].$$

Cette dernière proposition nous permet d'établir le résultat suivant :

Proposition 3 Pour tout x de I, on a

$$\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x). \tag{4}$$

En particulier, $\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) = \displaystyle\int_a^b f(t)h(t)\mathrm{d}t$.

Les fonctions introduites plus haut permettent de générer une variable aléatoire Z facile à simuler et ayant la même loi que la variable aléatoire X.

Proposition 4 Soit H la restriction de F à I. Alors, la fonction H réalise une bijection de I sur $]0,1[$. En plus, les deux variables aléatoires $Z = H^{-1}(U)$ et X ont la même loi.

Nous allons maintenant appliquer l'étude théorique discutée plus haut pour la simulation de certaines variables aléatoires usuelles.

Simulation de la loi exponentielle.

On suppose que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On peut supposer donc que $I =]0,+\infty[$ et on rappelle que f est donnée par

$$\forall\, x > 0,\ f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Pour la simulation de la variable aléatoire X, il suffit d'être capable de déterminer explicitement la fonction H^{-1} d'après l'étude théorique précédente. On peut donc écrire en `Python` une fonction `expo` permettant de simuler la loi exponentielle.

Simulation de la loi de Laplace.

On suppose maintenant que la variable aléatoire X suit la loi de Laplace donnée par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}.$$

Pour la simulation de la variable aléatoire X, on introduit une nouvelle variable aléatoire Y suivant une loi exponentielle de paramètre 1 et une variable aléatoire V suivant une loi uniforme sur $\{-1,1\}$ et indépendante de Y puis on pose $Z = VY$. Le lien entre les variables aléatoires Z et X est donné par le résultat suivant :

Proposition 5 Les variables aléatoires Z et X ont la même loi.

Basé sur ce ce résultat, il est possible de simuler la variable aléatoire X. Nous appelons `laplace` une fonction écrite en `Python` qui permet de simuler la loi de X.

Jusque là, on a pu avoir une idée sur une méthode de simulation de quelques lois usuelles en se basant sur la simulation de la loi uniforme et sur le calcul de façon explicite de la fonction inverse H^{-1}. Cette méthode s'appelle la méthode d'inversion. Nous allons maintenant présenter une autre méthode appelée simulation par la méthode du rejet. Pour la présentation de cette méthode, on suppose qu'on sait simuler la loi d'une variable aléatoire Z ayant une densité de probabilité g continue et strictement positive sur l'intervalle I telle qu'il existe $c > 0$ et $f(x) \leqslant cg(x)$ pour tout x dans I de sorte que l'on puisse définir une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0,1]$ telle que $f(x) = cg(x)h(x)$ pour tout x dans I. Ensuite, on introduit :

- une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k\geqslant 1}$ suivant la loi uniforme sur $]0,1[$,
- une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\geqslant 1}$ à valeurs dans $]a,b[$, ayant toutes la même loi de densité de probabilité g de fonction répartition G.

En plus, on suppose, pour tout $n \geqslant 1$, que les variables

$$Z_1, \dots, Z_n, U_1, \dots, U_n$$

sont mutuellement indépendantes et on définit la variable aléatoire N prenant comme valeur le premier indice k tel que $U_k \leqslant h(X_k)$. Ces hypothèses nous permettent, en plus de la Proposition 3, de vérifier le résultat suivant :

Proposition 6 La variable aléatoire N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{c}$.

On définit alors la variable aléatoire Z comme étant la valeur de Z_N, c'est-à-dire la valeur de

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = Z_{N(\omega)}(\omega).$$

En explorant, pour $n \geqslant 1$, la relation qui existe entre l'événement $[Z \leqslant x] \cap [N = n]$ et les événements

$$[Z_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(Z_n)]\,,\ [U_1 > h(Z_1)]\,, \dots, [U_{n-1} > h(Z_{n-1})]\,,$$

on peut démontrer que

$$\mathbb{P}\left([Z_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(Z_n)]\right) = \frac{1}{c} F(x). \tag{5}$$

Puis à l'aide de la définition de la fonction Ψ introduite plus haut, on démontre aussi le résultat suivant :

Proposition 7 Les variables aléatoires X et Z ont la même loi.

Rappelons que l'objectif est de simuler la loi de la variable aléatoire X qui est aussi, d'après la Proposition 7, la loi de la variable aléatoire Z. Il suffit de savoir simuler la loi de Z. Prenons alors l'exemple où la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On suppose en plus que les variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n, \dots$ suivent la loi de Laplace de sorte que l'on puisse déterminer explicitement une constante $c > 0$ la plus petite possible telle que $f(x) \leqslant cg(x)$ pour tout x réel. De cette manière, on peut enfin simuler la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Une autre méthode pour simuler des variables gaussiennes consiste à partir d'un couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur le segment $[0,1]$ et à poser

$$X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V). \tag{6}$$

Le couple (X, Y) est un couple indépendant de variables aléatoires, de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Suggestions pour le développement

- ▶ *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.*
- On pourra simuler la loi exponentielle en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra simuler la loi de Laplace en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra simuler la loi normale en expliquant la méthode utilisée.
- On pourra démontrer l'une des propositions $1, \dots, 7$ citées plus haut.
- On pourra expliquer pourquoi la variable aléatoire décrite dans la formule (1) suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
- On pourra justifier le caractère gaussien du couple (X, Y) obtenu dans la formule (6).

7.5 Texte 5 de l'épreuve de modélisation

Epreuve de modélisation : File d'attente session 2021

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

I. Modélisation d'une file d'attente d'un guichet

On considère une file d'attente en temps discret qui se forme à un guichet, selon le phénomène suivant : à chaque instant $n \in I\!N$, il arrive un client avec la probabilité $p \in]0,1[$ et pas de client avec une probabilité $1-p$. Lorsqu'il y a au moins un client en attente, à chaque instant un client est servi et quitte le système (la file d'attente) avec probabilité $q \in]0,1[$, et personne ne quitte le système avec la probabilité $1-q$ (un client qui arrive à l'instant n repart au plus tôt à l'instant $n+1$). Les événements liés aux arrivées et aux départs des clients sont indépendants entre eux. On suppose qu'à chaque instant n, il est question d'un seul client qui peut arriver et d'un seul client qui peut quitter le système. On exclut l'arrivée de deux clients au même instant et on exclut le départ de deux clients au même instant mais on tolère l'arrivée d'un client et le départ d'un autre au même instant. On suppose que les clients sont servis dans l'ordre de leurs arrivées.
On modélise le nombre de clients présents dans la file à l'instant n par la variable X_n.
Si on note A_n (resp. D_n) l'événement "Arrivée d'un client à l'instant n" (resp. "Départ d'un client à l'instant n") et si $\bar{A}_n$ et $\bar{D}_n$ sont respectivement les événements complémentaires de A_n et B_n, alors X_{n+1} peut s'écrire sous la forme :

- si $X_n = 0$ alors $X_{n+1} = 1\!\!1(A_{n+1})$
- si $X_n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n 1\!\!1((A_{n+1} \cap D_{n+1}) \cup (\bar{A}_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1})) + (X_n+1) 1\!\!1(A_{n+1} \cap \bar{D}_{n+1}) + \\ &\quad + (X_n - 1) 1\!\!1(\bar{A}_{n+1} \cap D_{n+1}), \end{aligned}$$

avec, pour un événement E, $1\!\!1(E) = 1$ si E est réalisé et $1\!\!1(E) = 0$ si E n'est pas réalisé. Quand un événement n'est pas réalisé, c'est donc son complémentaire qui est réalisé.

On montre que $X = \{X_n, n \in I\!N\}$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible, d'espace d'état $I\!N$, et de matrice de transition $P = (P(i,j))_{i,j \in I\!N}$ donnée par.

$$P = \begin{pmatrix} \bar{p} & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q\bar{p} & pq + \bar{p}\bar{q} & p\bar{q} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

avec $\bar{p} = 1 - p$ et $\bar{q} = 1 - q$.
On montre, sous des conditions sur p et q, que la chaîne X possède une probabilité invariante unique $\pi = (\pi_i)_{i \in I\!N}$.
Une des mesures de performance du système est le temps moyen de séjour dans un sous espace d'états du système.

II- Un rappel sur les chaîne de Markov à temps discret
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$ un espace probabilisé dans lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées dans la modélisation proposée.
Soit le processus $X = (X_n)_{n \geq 0}$ défini par une suite de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini E appelé espace d'état, et soit $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ une loi de probabilités sur E. Pour $i \in E$, la notation $X_n = i$ signifie que le processus X est dans l'état i à l'instant n.

II.1 Définition 1. On dit que le processus $X = (X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret ($n \in I\!N$), à espace d'état E et de loi initiale μ si et seulement si

$$\forall\, n \geq 0,\ \forall\, i, i_0, \ldots, i_{n-1}, j \in E,$$

$$I\!P(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \quad = \quad I\!P(X_{n+1} = j / X_n = i)$$

$$I\!P(X_0 = i) = \mu(i)$$

La probabilité $I\!P(X_{n+1} = j / X_n = i)$ est appelée probabilité de transition, de la chaîne X, de l'état i à l'état j entre les instants n et $n + 1$.

II.2 Définition 2. La chaîne de Markov X est dite homogène dans le temps si et seulement si la probabilité $I\!P(X_{n+1} = j / X_n = j)$ est indépendante du temps n. Dans ce cas on la note $K(i, j) := I\!P(X_{n+1} = j / X_n = j)$, et la matrice ainsi obtenue $K = (K(i, j))_{i,j \in E}$ est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov homogène X.

II.3 Remarque 1. Une chaîne de Markov à temps discret et homogène X est caractérisée par le triplet (E, μ, K), où E est son espace d'état, $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$ est sa loi initiale, $\mu(i) = I\!P(X_0 = i)$, et $K = (K(i, j))_{i,j \in E}$ est sa matrice de transition.

II.4 Remarque 2. Pour tout état i fixé dans E, $\{K(i, j),\ \ j \in E\}$ est une loi de probabilité sur E. Les lignes de la matrice de transitions sont donc des lois de probabilité sur E.

II.5 Notations. On note $X \sim (E, \mu, K)$ pour désigner une chaîne de Markov $X = (X_n)_{n \geq 0}$ à temps discret, à espace d'état E, de loi initiale $\mu = (\mu(i))_{i \in E}$, et de matrice de transition $K = (K(i, j))_{i,j \in E}$.

II.6 Graphe de transition. Le graphe de transition d'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est un graphe orienté et évalué, dont les sommets sont les états (éléments de E) et les arcs sont des flèches dont les valeurs sont les coéfficients de la matrice K (la valeur de l'arc qui se dirige de l'état i vers l'état j est $K(i,j)$). Les arcs de valeurs nulles ne sont pas dessinés.

II.7 Définition 3. On dit qu'une chaîne de Markov $X \sim (E, \mu, K)$ est irréductible si et seulement si

$$\forall\, i, j \in E, \;\; \exists m \in I\!N^* \quad K^{(m)}(i,j) > 0$$

où $K^{(m)}(i,j)$ est l'entrée (i,j) de la matrice K^m. Cela représente la probabilité de passer de l'état i à l'état j en m transitions.
Nous avons donc pour tout $i, j \in E$,

$$K^{(m)}(i,j) = \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1} \in E} K(i,i_1)K(i_1,i_2)\cdots K(i_{m-1},j) \tag{1}$$

II.8 Proposition 1. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$.
Alors $\forall\, n \geq 0, \; \forall\, i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$

$$I\!P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = \mu(i_0)K(i_0,i_1)K(i_1,i_2)\cdots K(i_{n-1},i_n)$$

II.9 Proposition 2. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Alors

$$\forall\, m > 0, \quad I\!P(X_m = j) = \sum_{i \in E} \mu(i) K^{(m)}(i,j), \quad \forall j \in E$$

II.10 Proposition 3. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Alors

$$\forall\, n \geq 0, \; \forall\, m > 0, \; \forall\, i, j \in E, \quad I\!P(X_{n+m} = j / X_n = i) = I\!P(X_m = j / X_0 = i) = K^{(m)}(i,j)$$

II.11 Proposition 4. Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. Nous avons alors les équations de Chapman-Kolmogorov suivantes :

$$\forall m \geq 2 \;, \; \forall\, 0 < r < m \;, \; \forall\, i, j \in E, \quad K^{(m)}(i,j) = \sum_{k \in E} K^{(m-r)}(i,k) K^{(r)}(k,j)$$

II.12 Définition 4 (loi stationnaire ou invariante). Soit une chaîne de Markov homogène $X \sim (E, \mu, K)$. On dit qu'une loi de probabilité, $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ sur E, est une loi stationnaire de X (ou loi invariante par K) si et seulement si

$$\sum_{i \in E} \pi(i) K(i,j) = \pi(j), \quad \forall\, j \in E \tag{2}$$

Les équations (2) sont appelées **équations de balance ou d'équilibre**. Elles peuvent être réécrites matriciellement sous la forme

$$\pi^t K = \pi^t \qquad (\pi^t \text{ désigne la transposée du vecteur colonne } \pi)$$

II.13 Théorème 1. Si $X \sim (E, \mu, K)$ est une chaîne de Markov homogène et irréductible avec E fini, alors il existe une loi stationnaire $\pi = (\pi(i))_{i \in E}$ unique de X.

II.14 Génération d'une trajectoire d'une chaîne de Markov
Soit $X \sim (E, \mu, K)$ une chaîne de Markov homogène. Une procédure de génération d'une trajectoire $x = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$, de longueur p, de la chaîne X est la suivante :

on commence par générer la réalisation x_0 selon la loi de probabilité initiale μ définie sur E, puis à partir de x_0, on génère de manière récurssive pour $k = 1, \ldots, p$, chaque réalisation x_k par la loi de probabilité $K(x_{k-1}, .)$ définie sur E.

II.14.1 Génération selon une loi de probabilité discrète.
Pour une variable aléatoire réelle discrète Y à valeurs dans $E = \{y_k ; k = 1, 2, \ldots\}$ de loi de probabilités discrète $p_k = I\!P(Y = y_k),\ k = 1, 2, \ldots$, on génère une réalisation y de Y, en utilisant un nombre uniforme $u \in]0, 1[$, donnée par un générateur de nombres aléatoires (random), de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } u \leq p_1 & \text{on décide} \quad y = y_1 \\ \text{Sinon on décide } y = y_k & \text{telle que} \quad \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} p_i < u \leq \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \end{cases}$$

III- Suggestions de développement
Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

III.1 Aspect mathématique
1.) Proposer des preuves pour les propositions $1, 2, 3$ et 4
2.) Etudier la classification des états de la chaîne X du modèle proposé.
3.) Etudier l'existence et l'unicité d'une loi probabilité invariante π pour la chaîne du modèle proposé.
4.) Expliciter π, quand elle existe, en fonction des paramètres du modèle proposé.
5.) Définir le temps moyen de séjour de la chaîne X dans un état donné

III.2 Aspect enseignement
1.) Expliquer la formulation de X_{n+1} en fonction de X_n (donnée dans le text)
2.) Tracer le graphe de transition de la chaîne X
3.) Expliquer ce que signifie l'homogénéité de la chaîne X.
4.) Expliquer ce que signifie la classification des états de la chaîne X.
5.) Proposer d'autres mesures de performance du système modélisé
6.) Repérer les changements dans le modèle si on rajoute la contrainte suivante : la capacité du système est limitée (à tout instant n, on ne peut avoir plus de K

clients dans le système).

III.3 Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

1.) Simuler et tracer une trajectoire de la chaîne X de l'instant $n = 0$ à l'instant $n = 100$ en supposant que X démarre dans l'état 0, pour $p = 1/2$ et $q = 3/4$.

2.) En générant 100000 trajectoires de X démarrant dans l'état 0, calculer une approximation de π_2. On traitera le cas $(p, q) = (1/2, 3/5)$.

3.) On suppose maintenant que le système est de capacité finie K. Dans ce cas l'espace d'état de X devient $\{0, 1, \ldots, K\}$. Pour simplifier on garde les mêmes notations que pour le cas d'une capacité illimité.

3.1) Tronquer la matrice de transition P en supprimant les lignes $i > K$ et les colones $j > K$, puis renormaliser la dernière ligne de la matrice tronquée pour obtenir une matrice de transition.

3.2) En prenant $K = 3$ (dans toute la suite), expliciter la loi invariante π.

3.3) Générer une trajectoire de longueur $n = 1000$ et calculer les quantités $\hat{p}_j(n)$, pour $j = 0, 1, \ldots, K$, définies par :

$$\hat{p}_j(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(X_k = j)$$

3.4) Comparer graphiquement les π_j avec les $\hat{p}_j(n)$ pour les valeurs de n : $100, 1000$ et 10000. On traitera les cas $(p, q) = (1/2, 3/5)$

3.5) Proposer une approximation du temps moyen de séjour dans un état du système.

7.6 Texte 6 de l'épreuve de modélisation

Calcul de vecteurs et valeurs propres

Introduction

Sans aucun doute, les valeurs ou vecteurs propres d'une matrice carrée ont beaucoup d'applications dans les domaines des sciences.
Malgré cette restriction, dans beaucoup de problèmes issus des sciences physiques est présente.

1 Obtention de la valeur propre dominante.

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique $\Delta_A(t) = (t-\lambda)^p S(t)$ avec $S(\lambda) \neq 0$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K}$ est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes. On note μ une racine de $S(t)$ de module maximal, P la matrice de la projection sur $\ker(\lambda I_n - A)$ parallèlement à $\ker S(A)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $Q = A - \lambda P$ et $q = n - p$. On suppose que $|\lambda| > |\mu|$ et que la multiplicité algébrique p coïncide avec la multiplicité géométrique $\dim\ker(\lambda I_n - A)$. On fait le départ d'un vecteur x_0 de $\mathbb{K}^n$ tel que $Px_0 \neq 0$ et on définit les deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$ et $z_k = \frac{\lambda^k P x_0}{\|\lambda^k P x_0\|}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit F une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que ses colonnes $v_1, \ldots, v_p$ forment une base de $\mathbb{F}$ et G une matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ telle que ses colonnes $w_1, \ldots, w_q$ forment une base de $\mathbb{G}$. On note Λ la matrice obtenue par juxtaposition verticale de F et G ; $\Lambda = [F, G]$.

Proposition 1
La matrice Λ est inversible et on a

$$P = \Lambda \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \Lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \Lambda^{-1}, \tag{1.1}$$

où B est une matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ telle que $AG = GB$. En plus, on a $PQ = QP = 0$ et

$$A^k = \lambda^k P + Q^k. \tag{1.2}$$

pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

On peut vérifier que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(Q) \subset D(0, \rho(A))$, où $D(0, \rho(A))$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\rho(A)$. Ici $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.

Proposition 2
Les deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et on a

$$\|x_k - z_k\| \leqslant \frac{2\,|\lambda|^{-k}}{\|Px_0\|} \left\|Q^k x_0\right\| \tag{1.3}$$

pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Pour l'inégalité (1.3), on pourra montrer que

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} - \frac{x}{\|x\|} \right\| \leqslant \frac{2\,\|z - x\|}{\|x\|} \tag{1.4}$$

pour tous x et z non nuls de $\mathbb{K}^n$. Comme conséquence, on a

Corollaire 3. Si N est une norme sur $\mathbb{K}^n$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_k - z_k\| \leqslant \frac{2c\,\|x_0\|}{\|Px_0\|}\,|\lambda|^{-k}\,\mathsf{N}\,(Q)^k \tag{1.5}$$

où N est la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme N.

Corollaire 4. Lorsque A est diagonalisable, il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_k - z_k\| \leqslant \frac{2c\,\|x_0\|}{\|Px_0\|}\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|^k. \tag{1.6}$$

On pourra voir l'exercice 2 page 5 pour une preuve de ce dernier corollaire. En se basant sur cet exercice, on peut aussi montrer le résultat :

Corollaire 5. Lorsque A est non diagonalisable et $\varepsilon \in]0, |\lambda| - |\mu|[$, il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_k - z_k\| \leqslant \frac{2c\,\|x_0\|}{\|Px_0\|}\left(\frac{|\mu| + \varepsilon}{|\lambda|}\right)^k. \tag{1.7}$$

En résumé, on a

> **Proposition 6**
> En déduire que pour tout $\varepsilon \in]0, |\lambda| - |\mu|[$, il existe une constante $C > 0$ telle que
>
> $$|\langle x_k\,,\,Ax_k\rangle - \lambda| \leqslant C\left(\frac{|\mu| + \varepsilon}{|\lambda|}\right)^k \tag{1.8}$$
>
> pour tout k dans $\mathbb{N}$ lorsque A est non diagonalisable et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
>
> $$|\langle x_k\,,\,Ax_k\rangle - \lambda| \leqslant C\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|^k \tag{1.9}$$
>
> pour tout k dans $\mathbb{N}$ lorsque A est diagonalisable.

Pour se convaincre, on pourra montrer cette dernière proposition en commençant par vérifier que

$$|\langle x\,,\,Ax\rangle - \langle z\,,\,Az\rangle| \leqslant 2|||A|||_2\,\|x - z\|_2\,,$$

où $|||\cdot|||_2$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$, pour tous x et z des vecteurs unitaires au sens de la norme $\|\cdot\|_2$. Pour une application, on pourra appliquer l'étude théorique ci-dessus à la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Obtention de toutes les valeurs propres.

On suppose que la matrice A admet n valeurs propres deux à deux distinctes et on on se propose de déterminer une valeur propre donnée λ de A.

> **Proposition 1**
> Il existe $r > 0$ tel que $D(\lambda, r) \cap D(\gamma, r) = \emptyset$ pour toutes valeurs propres α et γ de A telles que $\alpha \neq \gamma$, où $D(z, r)$ est le disque ouvert de centre z et de rayon r.

En remarquent que si $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}(A)$, alors $(\lambda - \alpha)^{-1}$ est une valeur propre de $(A - \alpha I_n)^{-1}$ et que si nous avons un moyen pour choisir un point du disque $D(\lambda, r)$, alors l'étude du Paragraphe 1 permet l'obtention de la valeur propre λ ainsi qu'un vecteur propre associé.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 11 & -5 \\ -16 & 17 & -7 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Suggestion de développement

Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur.

- On pourra expliquer comment cette étude théorique peut être utilisée pour calculer un vecteur propre de A associé à la valeur propre dominante λ et écrire un programme pour le calculer pour la matrice proposée ou pour une matrice de votre choix.
- Rappelons que le choix de x_0 est contraint par la condition $Px_0 \neq 0$. On pourra expliquer pourquoi avec un choix aléatoire de x_0 cette condition est toujours remplie et écrire un programme dans ce sens pour tester la validité de votre votre justification.
-

1- **1**-**1**- Vérifier que Λ est inversible puis déterminer $A\Lambda$ et ΛJ et en déduire le polynôme caractéristique $\Delta_A(t)$ de A puis vérifier que A admet une valeur propre dominante que l'on précisera.

1-**2**- Déterminer les matrices P et Q définies dans (1.1).

1-**3**- Vérifier que A est non diagonalisable.

1-**4**- Écrire en `Python` une fonction qui calcule les valeurs approchées de la valeur propre dominante et d'un vecteur propre associé à cette valeur propre dominante.

7.7 Texte 7 de l'épreuve de modélisation

QUELQUES MODÈLES DE DYNAMIQUE DES POPULATIONS

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libre d'organiser votre présentation comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la présentation soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

1. Introduction

La *dynamique des populations* s'intéresse, entre autres, à l'évolution en fonction du temps du nombre d'individus dans une population d'êtres vivants. L'approche *compartimentale* est très souvent utilisée dans la construction des modèles. Elle consiste à partitionner la population en compartiments disjoints dont la taille varie en fonction du temps. Chaque compartiment regroupe les individus qui se trouvent dans le même état (age, taille ou poids, ...). Les différentes connaissances dont on dispose en ce qui concerne la population étudiée sont ensuite utilisées pour déterminer les taux de transfert entre les différents compartiments.

On s'intéresse dans la suite à des *modèles discrets* : la variable d'évolution qui est le temps dans notre cas varie dans $\mathbb{N}$, et elle sera notée n. Ainsi, on s'intéresse à l'état de la population uniquement à intervalles de temps réguliers.

Supposons que la population étudiée est divisée en d compartiments, disons $C_1, \ldots, C_d$, de manière que chaque individu se trouve à un instant donné n dans un seul compartiment. Si on note x_i^n le nombre d'individus qui se trouvent dans le compartiment C_i à l'instant n alors l'état à l'instant n de la population étudiée est représenté par le vecteur $x^n = (x_1^n, \ldots, x_d^n)^T \in \mathbb{R}_+^d$. Les taux de transfert entre les différents compartiments C_i permettent d'établir la loi qui détermine x^{n+1} en fonction de x^n et de n. Dans la suite on s'intéresse à des modèles autonomes, c'est-à-dire du type

$$x^{n+1} = \phi(x^n),$$

où $\phi : \mathbb{R}_+^d \longrightarrow \mathbb{R}_+^d$ est une application.

2. Un modèle simple structuré par age

La population étudiée est compartimentée par tranches d'âge, et l'intervalle de temps est l'année. Si d est l'age maximal que peut atteindre un individu de la population étudiée alors la population est divisée en d compartiments $C_1, \ldots, C_d$, où C_i regroupe les individus dont l'âge est dans l'intervalle $[i-1, i[$.

Nous allons étudier la dynamique de la population en question tenant compte uniquement des taux de fertilité et les taux de mortalité dans chaque compartiment C_i.

1. On note $\mu_i \geq 0$ le taux de fertilité des individus dans le compartiment C_i. Ainsi, un individu du compartiment C_i aura en moyenne μ_i enfants par an.
2. On note $\tau_i \in]0,1[$ le taux de survie des individus du compartiment C_i durant une année. Ainsi, si x_i^n est le nombre d'individus dans C_i à l'instant n alors le nombre de ceux qui restent en vie après une année est $\tau_i x_i^n$. Ces individus entrent alors dans le compartiment C_{i+1}.

Considérons alors les matrices $F, T \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ données par

$$F = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_d \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \tau_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \tau_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

La loi d'évolution du modèle est alors donnée par

$$x^{n+1} = (F+T)x^n, \tag{1}$$

avec $x^0 \in \mathbb{R}_+^d$.

3. Un modèle structuré par taille

Dans ce modèle, la population étudiée est structurée par taille. Ainsi, de manière analogue au modèle précédent, si d est la taille maximale qu'un individu peut atteindre alors on divise la population en d compartiments $C_1, \ldots, C_d$ tels que C_i représente les individus ayant une taille dans l'intervalle $[i-1, i[$. Comme dans le modèle structuré par âge, on note μ_i et τ_i respectivement le taux de fertilité et de survie dans le compartiment C_i.

1. On note $\sigma_i \geq 0$ le taux d'individus dans le compartiement C_i ayant atteint une taille dans l'intervalle $[i, i+1[$ au bout d'une année.
2. On note $\gamma_i > 0$ le taux d'individus du compartiment C_i dont la taille n'a pas changé au bout d'une année.

On a alors $\sigma_d = 0$ et $\gamma_i + \sigma_i = \tau_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$. La dynamique du modèle suit alors la loi

$$x^{n+1} = (F + S)x^n, \tag{2}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}_+^d$ et

$$S = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sigma_1 & \gamma_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_{d-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{d-1} & \gamma_d \end{pmatrix}$$

4. Étude de la dynamique des modèles

Une caractéristique commune aux deux modèles est que les matrices qui y interviennent sont *positives*, c'est-à-dire tous leurs coefficients sont positifs.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est *strictement positive*, et on note $A > 0$, si tous ses coefficients sont positifs. On dit qu'une matrice positive A est *primitive* s'il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^k > 0$. On a alors le théorème important suivant.

Théorème 4.1 (Perron-Frobenius)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice positive. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A. Si en plus A est primitive alors on a les propriétés plus précises suivantes.*

1. *La valeur propre $\rho(A)$ est > 0 et de multiplicité algébrique* 1.
2. *Il existe un vecteur propre $v = (v_1, \dots, v_d)^T$ de A pour la valeur propre $\rho(A)$ tel que $v_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$.*
3. *Tout vecteur propre x de A tel que $x \geq 0$ vérifie $x = \alpha v$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*
4. *Toute valeur propre λ de A autre que $\rho(A)$ vérifie $|\lambda| < \rho(A)$.*

Dans la suite on suppose que, dans les modèles, tous les compartiments d'âge (resp. de taille) sont fertiles c'est-à-dire que $\mu_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$. Dans ce cas, les matrices $F + T$ et $F + S$ sont primitives. En plus, en utilisant le théorème de Perron-Frobenius, on peut prédire le comportement assymptotique de la population totale en fonction de la valeur du rayon spectral de la matrice du modèle en question.

Corollaire 4.2. *Pour tout $x^0 > 0$ on a les propriétés suivantes.*

1. *Si $\rho(F+T) > 1$ la population totale $X^n = \sum x_i^n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.*
2. *Si $\rho(F+T) = 1$ la population totale X^n tend vers une valeur strictement positive lorsque $n \to +\infty$.*
3. *Si $\rho(F+T) < 1$ la population totale X^n tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.*

5. Suggestions pour le développement

Cette section ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci-dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

1. Expliquer pourquoi l'évolution du modèle de la section 2 est donnée par l'équation (1).
2. Sous l'hypothèse que $\mu_i > 0$ pour tout i, montrer que la matrice $F+T$ est primitive.
3. À l'aide de l'outil informatique, étudier l'évolution du modèle structuré par âge, donné par l'équation (1). On veillera à donner un exemple pour chaque comportement possible, et faire des représentations graphiques lorsque c'est possible.
4. En remarquant que la transposée d'une matrice primitive est primitive et en utilisant le théorème de Perron-Frobenius montrer le corollaire 4.2.
5. Dans le cas où $\rho(F+T) = 1$ montrer que la suite $(x^n)_n$ du modèle (1) est convergente, et exprimer sa limite en fonction de la valeur intiale x^0.
6. À l'aide de l'outil informatique, étudier l'évolution du modèle structuré par taille donné par l'équation (2).

Chapitre 8

Programme du concours de l'agrégation - Session 2022

Le programme des épreuves de l'agrégation n'est pas rédigé comme un plan de cours. Il décrit un ensemble de connaissances que le candidat doit maîtriser et savoir illustrer. Il comporte des répétitions lorsque des notions interviennent naturellement suivant différents points de vue. Le programme évoque parfois des exemples; ceux-ci sont donnés à titre purement indicatif et peuvent être remplacés par d'autres qui seraient également pertinents.

Dans les titres 1 à 5 qui suivent, tous les corps (notés K en général) sont supposés commutatifs.

8.1 Algèbre linéaire

8.1.1 Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels, applications linéaires. Produit d'espaces vectoriels. Sous-espaces, image et noyau d'une application linéaire. Espaces quotients. Somme de sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Familles libres, familles génératrices ; bases. Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel E, groupe linéaire $GL(E)$.

2. Sous-espacess tables d'unendomorphisme. Valeurs propres,vecteurs propres,sous-espaces propres.

3. Représentations linéaires d'un groupe. Irréductibilité. En dimension finie : exemples de décomposition d'une représentation linéaire en somme directe de sous-représentations, lemme de Schur.

8.1.2 Espaces vectoriels de dimension finie

1. Espaces vectoriels de dimension finie. Existence de bases : isomorphisme avec K^n. Existence de supplémentaires d'un sous-espace. Rang d'une application linéaire, rang d'un système de vecteurs. Espace dual. Rang d'un système d'équations linéaires. Transposée d'une application linéaire. Base duale. Bidualité. Orthogonalité.

2. Applications multilinéaires. Déterminant d'un système de vecteurs, d'un endomorphisme. Groupe spécial linéaire $SL(E)$. Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. Matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, déterminant, inversibilité.

Matrices à coefficients dans un corps. Rang d'une matrice. Représentations matricielles d'une application linéaire. Changement de base.
Méthode du pivot de Gauss. Notion de matrices échelonnées. Applications à la résolution de systèmes d'équations linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées, à la détermination du rang d'une matrice, à la détermination d'équations définissant un sous-espace vectoriel.

4. Sous-espaces stables d'un endomorphisme, lemme des noyaux. Polynôme caractéristique. Polynômes d'endomorphismes. Polynômes annulateurs, polynôme minimal. Théorème de Cayley- Hamilton. Diagonalisation, trigonalisation. Sous-espaces caractéristiques, décomposition de Dunford. Exponentielle des matrices réelles ou complexes.

8.2 Groupes

Les différentes notions de théorie des groupes introduites dans les paragraphes suivants pourront être illustrées et appliquées dans des situations géométriques.

1. Groupes, morphismes de groupes. Produit direct de groupes. Sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Ordre d'un élément. Sous-groupes distingués (ou normaux), groupes quotients. Action d'un groupe sur un ensemble. Stabilisateur d'un point, orbites, espace quotient. Formule des classes. Classes de conjugaison. Application à la détermination des groupes d'isométries d'un polytope régulier en dimension 2 et 3.

2. Groupes cycliques. Groupes abéliens de type fini. Groupe des racines complexes n-ièmes de l'unité, racines primitives.

3. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, en produit de cycles à supports disjoints. Signature. Groupe alterné. Application : déterminants.

4. Définition des groupes classiques d'automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie : groupe général linéaire, groupe spécial linéaire; groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal; groupe unitaire, groupe spécial unitaire.

5. Représentations d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Cas d'un groupe abélien. Orthogonalité des caractères irréductibles. Groupe dual. Transformée de Fourier. Convolution. Cas général. Théorème de Maschke. Caractères d'une représentation de dimension finie. Fonctions centrales sur le groupe, base orthonormée des caractères irréductibles. Exemples de représentations de groupes de petit cardinal.

8.3 Groupes Anneaux, corps et polynômes

1. Anneaux (unitaires), morphisme d'anneaux, sous-anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Pro- duit d'anneaux. Idéaux d'un anneau commutatif, anneaux quotients, idéaux premiers, idéaux maximaux. Notion d'algèbre (associative ou non) sur un anneau commutatif.

2. Algèbre des polynômes à une ou plusieurs indéterminées sur un anneau commutatif. Décompo- sition en somme de polynômes homogènes. Polynômes symétriques.

3. Corps, sous-corps. Caractéristique. Extension de corps. Corps des fractions d'un anneau intègre. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Théorème de d'Alembert-Gauss.

4. Divisibilité dans les anneaux commutatifs intègres. Éléments irréductibles, éléments inversibles, éléments premiers entre eux. Anneaux factoriels. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun.

   Factorialité de $A[X]$ quand A est un anneau factoriel. Anneaux principaux. Théorème de Bézout. Anneaux euclidiens. Algorithme d'Euclide. Cas de l'anneau Z et de l'algèbre $K[X]$ des polynômes sur le corps K. Polynômes irréductibles. Exemples : polynômes cyclotomiques dans $Q[X]$, critère d'Eisenstein.

5. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Nombres premiers. Étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et de ses éléments inversibles, fonction indicatrice d'Euler. Théorème chinois.

6. Racines d'un polynôme, multiplicité. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé. Sommes de Newton. Polynôme dérivé. Éléments algébriques et transcendants. Exten- sions algébriques. Corps algébriquement clos. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps finis. Morphisme de Frobenius.

7. Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps. Décomposition en éléments simples. Cas réel et complexe.

8.4 Formes bilinéaires et quadratiques sur un espace vectoriel

1. Formes bilinéaires. Formes bilinéaires alternées. Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques, forme polaire d'une forme quadratique (en caractéristique différente de 2). Éléments orthogonaux, interprétation géométrique. Formes non dégénérées. Adjoint d'un endomorphisme. Représentation matricielle, changement de base. Rang d'une forme bilinéaire.

2. Orthogonalité. Sous-espaces isotropes. Décomposition d'une forme quadratique en somme de carrés. Théorème d'inertie de Sylvester. Classification dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Procédés d'orthogonalisation.

3. Espaces vectoriels euclidiens, espaces vectoriels hermitiens. Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien avec son dual. Supplémentaire orthogonal. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme. Bases orthonormales.

4. Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal. Exemple de générateurs du groupe orthogonal : décomposition d'un automorphisme orthogonal en produit de réflexions. Endomorphismes symétriques, endomorphismes normaux. Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique. Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, l'une étant définie positive. Décomposition po- laire dans $GL(n,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 2, classification des éléments de $O(2,\mathbb{R})$. Espaces vectoriels euclidiens de dimension 3, classification des éléments de $O(3,\mathbb{R})$; produit mixte, produit vectoriel.

5. Groupe unitaire, groupe spécial unitaire. Diagonalisation des endomorphismes normaux. Décomposition polaire dans $GL(n,\mathbb{C})$.

8.5 Géométrie affine et euclidienne

Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espace affine et espace vectoriel associé. Application affine et application linéaire associée. Sous-espaces affines, barycentres. Repères affines, équations d'un sous-espace affine. Groupe affine, notion de propriété affine. Groupe des homothéties-translations, affinités. Parties convexes, en- veloppe convexe d'une partie d'un espace affine réel, points extrémaux.

2. Isométries d'un espace affine euclidien. Groupe des isométries d'un espace affine euclidien. Déplacements, antidéplacements. Similitudes directes et indirectes du plan. Classification des isométries en dimension deux et trois.

3. Angles en dimension 2 : angles de vecteurs, angles de droites, Théorème de l'angle inscrit, cocyclicité.

4. Groupe des isométries laissant stable une partie du plan ou de l'espace. Polygones réguliers. Relations métriques dans le triangle. Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

5. Application des formes quadratiques à l'étude des coniques propres du plan affine euclidien (foyer, excentricité) et des quadriques de l'espace affine euclidien de dimension 3.

8.6 Analyse à une variable réelle

8.6.1 Nombres réels

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Topologie de $\mathbb{R}$. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Suites de nombres réels : convergence, valeur d'adhérence. Suites récurrentes. Limites inférieure et supérieure. Suites de Cauchy. Complétude de $\mathbb{R}$. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes de $\mathbb{R}$. Parties connexes de $\mathbb{R}$.

8.6.2 Séries numériques

Convergence des séries à termes réels. Séries géométriques, séries de Riemann. Séries à termes positifs. Sommation des relations de comparaison. Comparaison d'une série et d'une intégrale. Estimations des restes. Convergence absolue. Produits de séries. Séries alternées.

8.6.3 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles

1. Continuité
   Limites, continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment. Étude de la continuité des fonctions monotones. Continuité d'une fonction réciproque.

2. Dérivabilité
   Dérivée en un point, fonctions dérivables. Dérivée d'une fonction composée. Dérivée d'une fonction réciproque. Théorèmes de Rolle et des accroissements finis. Etude des variations d'une fonction. Dérivées d'ordre supérieur. Applications de classe C^k, de classe C^k par morceaux. Formule de Leibniz. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Lagrange. Calcul de développements limités et de développements asymptotiques.

8.6.4 Fonctions usuelles

Fonctions polynômes, fonctions rationnelles. Logarithmes. Exponentielles. Fonctions puissances. Fonctions circulaires et hyperboliques. Fonctions circulaires et hyperboliques réciproques.

8.6.5 Intégration

1. Intégrale sur un segment des fonctions continues par morceaux Calcul de primitives. Sommes de Riemann. Primitives d'une fonction continue. Méthodes usuelles de calcul d'intégrales. Changement de variable. Intégration par parties.

2. Intégrales généralisées Intégrales absolument convergentes. Intégration des relations de comparaison. Intégrales semi- convergentes.

8.6.6 Suites et séries de fonctions

Convergence simple, convergence uniforme. Continuité et dérivabilité de la limite. Cas des séries de fonctions ; convergence normale.

Théorèmes d'approximation de Weierstrass polynomial et de Weierstrass trigonométrique.

8.6.7 Convexité

Fonctions convexes d'une variable réelle. Continuité et dérivabilité des fonctions convexes. Caractérisations de la convexité. Inégalités de convexité.

8.7 Analyse à une variable complexe

8.7.1 Séries entières

1. Rayon de convergence. Propriétés de la somme d'une série entière sur son disque de convergence : continuité, dérivabilité par rapport à la variable complexe, primitives.

2. Exponentielle complexe; propriétés. Extension des fonctions circulaires au domaine complexe. Développement en série entière des fonctions usuelles.

8.7.2 Fonctions d'une variable complexe

1. Fonctions holomorphes. Conditions de Cauchy-Riemann. Intégrale d'une fonction continue le long d'un chemin C^1 par morceaux. Primitives d'une fonction holomorphe. Déterminations du logarithme. Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale.

2. Indice d'un chemin fermé C^1 par morceaux par rapport à un point.

3. Formules de Cauchy. Analyticité d'une fonction holomorphe. Principe des zéros isolés. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

4. Singularités isolées. Séries de Laurent. Fonctions méromorphes. Théorème des résidus.

5. Suites et séries de fonctions holomorphes. Stabilité de l'holomorphie par convergence uniforme.

8.8 Topologie

8.8.1 Topologie et espaces métriques

1. Topologie d'un espace métrique. Topologie induite. Produit fini d'espaces métriques.

2. Suites. Valeurs d'adhérence. Limites. Applications continues. Homéomorphismes.

3. Compacité.Équivalencedesdéfinitionsentermesdevaleursd'adhérence(Bolzano-Weierstrass) ou de recouvrements ouverts (Borel-Lebesgue). Connexité. Composantes connexes. Connexité par arcs.

4. Applications lipschitziennes, applications uniformément continues. Théorème de Heine.

5. Espaces métriques complets. Théorème du point fixe pour les applications contractantes.

8.8.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1. Topologie d'un espace vectoriel normé. Normes équivalentes. Cas des espaces de dimension finie. Normes $\|\dot{}\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Espaces de Banach. Séries absolument convergentes dans un espace de Banach.

2. Applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue.

3. Norme de la convergence uniforme. Espace des fonctions continues bornées sur un espace mé- trique, à valeurs dans un espace de Banach.

4. Étude de la compacité de parties d'un espace vectoriel normé : théorème de Riesz, théorème d'Ascoli.

8.8.3 Espaces de Hilbert

1. Projection sur un convexe fermé. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

2. Dual d'un espace de Hilbert, théorème de représentation de Riesz. Cas des espaces l^2 et L^2. Bases hilbertiennes (dans le cas séparable). Exemples de bases de polynômes trigonométriques et de polynômes orthogonaux. Théorème de Lax-Milgram. (

3. Espace $H_0^1(]0,1[)$ et application au problème de Dirichlet en dimension 1.

8.9 Calcul différentiel

8.9.1 Fonctions différentiables

1. Applications différentiables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Différentielle (application linéaire tangente). Dérivée selon un vecteur.

2. Dérivées partielles. Matrice jacobienne, vecteur gradient, matrice hessienne. Composition d'applications différentiables. Théorème des accroissements finis. Applications de classe C^1.

3. Applications de classe C^k. Dérivées partielles d'ordre k. Interversion de l'ordre des dérivations. Formule de Taylor-Young, formule de Taylor avec reste intégral.

4. Étude locale des applications à valeurs dans $\mathbb{R}$. Développements limités. Recherche des extrema locaux, caractérisation de la convexité des fonctions de classe C^1 et C^2 définies sur un ouvert convexe $\mathbb{R}^n$.

5. Difféomorphismes. Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.

8.9.2 Équations différentielles—

1. Équations différentielles de la forme $X' = f(t, X)$ sur $I \times \Omega$ avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Théorème de Cauchy-Lipschitz. Solutions maximales. Lemme de Gronwall. Théorème de sortie de tout compact (théorème “des bouts”).

2. Cas des équations différentielles autonomes. Portrait de phase, comportement qualitatif. Stabilité des points d'équilibre (théorème de linéarisation).

3. Systèmes différentiels linéaires. Méthode de variation des constantes (fomule de Duhamel). Cas des coefficients constants. Application à la résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 1.

8.9.3 Géométrie différentielle

1. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Définitions équivalentes : graphe local, paramétrisation locale, équation locale. Espace tangent. Gradient. Cas des surfaces de $\mathbb{R}^3$, position par rapport au plan tangent.

2. Construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique. Etude métrique des courbes : abscisse curviligne, longueur d'un arc C^1.

3. Extrema liés, multiplicateurs de Lagrange.

8.10 Calcul intégral

8.10.1 Notions de théorie de la mesure

Définition des espaces mesurables, tribu produit, cas particulier des tribus boréliennes. Définition d'une mesure positive, cas particuliers de la mesure de comptage, de la mesure de Lebesgue (construction admise) et des mesures de probabilité. Définition d'une mesure produit (construction admise). Défini- tion des fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.

8.10.2 Intégration

1. Intégrale des fonctions mesurables positives, théorème de convergence monotone. Lemme de Fatou. Fonctions intégrables, théorème de convergence dominée.

2. Fonctions intégrables à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Continuité, dérivabi- lité des intégrales à paramètres.

3. Espaces L^p, où $1 \leq p \leq \infty$. Complétude. Inégalité de Holder.

4. Théorème de Fubini. Changement de variables dans une intégrale multiple. Cas des coordonnées polaires, cas des coordonnées sphériques.

5. Convolution. Régularisation et approximation par convolution.

8.10.3 Analyse de Fourier

1. Séries de Fourier des fonctions localement intégrables périodiques d'une variable réelle. Lemme de Riemann-Lebesgue. Produit de convolution de fonctions périodiques. Théorèmes de Diri- chlet, de Fejer et de Parseval.

2. Transformation de Fourier sur les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$. Théorème de Plancherel.

8.11 Probabilités

8.11.1 Définition d'un espace probabilisé

Evénements, tribus, mesure de probabilité. Indépendance d'événements et de tribus. Loi du 0-1, lemmes de Borel-Cantelli. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales.

8.11.2 Variables aléatoires, loi d'une variable aléatoire

1. Loi discrète, loi absolument continue. Fonction de répartition et densité. Loi conjointe de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires. Espérance et variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, théorème de transfert. Moments. Exemples de lois : loi de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson, uniforme, exponentielle, de Gauss.

2. Fonction caractéristique. Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Application aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

8.11.3 Convergences de suites de variables aléatoires

1. Convergence en probabilité, dans L^p, presque sûrement, en loi. Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Lévy.

2. Loi faible et loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

8.12 Distributions

8.12.1 Espaces $S(\mathbb{R}^d)$ et $S'(\mathbb{R}^d)$

1. Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ des fonctions à décroissance rapide. Transformation de Fourier sur $S(\mathbb{R}^d)$. Convolution de deux fonctions de $S(\mathbb{R}^d)$. Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente.

2. Espace $S'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées. Dérivation des distributions tempérées. Convolution d'une distribution tempérée avec une fonction de $S(\mathbb{R}^d)$). Multiplication par une fonction C^∞ à croissance lente. Exemples de distributions tempérées : fonctions localement intégrables, masse de Dirac, valeur principale de Cauchy, cas des fonctions périodiques, peigne de Dirac.

3. Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^d)$. Formule d'inversion. Transformation de Fourier et dérivation, Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

8.12.2 Applications

Calcul de dérivées et de transformée de Fourier de distributions. Formule de Poisson (dimension un). Notion de solution élémentaire d'opérateurs différentiels à coefficients constants (cas du laplacien). Notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires : application, par exemple, à la résolution des équations de Laplace, de la chaleur, des ondes. Utilisation de la convolution et de la transformée de Fourier-Laplace pour la résolution d'équations différentielles linéaires en dimension 1.

8.13 Méthodes numériques

8.13.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Notion de conditionnement. Théorème de Gershgorin-Hadamard. Pivot de Gauss, décomposition LU. Méthodes itératives (par exemple méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel); analyse de convergence : normes subordonnées, rayon spectral.
Décomposition en valeurs singulières.
Exemple de la matrice de discrétisation par différences finies du laplacien $1D$.

8.13.2 Méthodes itératives de résolution approchée d'équations réelles et vecto- rielles

Cas des systèmes linéaires : méthodes itératives. Recherche d'éléments propres : méthode de la puis- sance. Optimisation de fonctions convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant, moindres carrés. Problèmes non linéaires réels et vectoriels : méthode de dichotomie, méthode de Picard, méthode de Newton, vitesse de convergence et estimation de l'erreur.

8.13.3 Intégration numérique

Méthode des rectangles, estimation de l'erreur. Méthode de Monte-Carlo : vitesse de convergence, application au calcul d'intégrales multiples.

8.13.4 Approximation de fonctions numériques

Interpolation de Lagrange : polynôme de Lagrange d'une fonction en $(n+1)$ points, estimation de l'erreur. 13.5 Équations différentielles ordinaires Aspects numériques du problème de Cauchy : méthode d'Euler explicite, consistance, stabilité, convergence, ordre.

8.13.5 Transformée de Fourier

Transformée de Fourier discrète sur un groupe abélien fini. Transformée de Fourier rapide.

Chapitre 9

Annexe : Sujets du concours

9.1 Épreuve écrite d'analyse et probabilités

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

EAE MAT 2

SESSION 2022

AGREGATION

CONCOURS EXTERNE

Section
MATHÉMATIQUES

Composition d'analyse et probabilités

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence.
De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé consiste notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de la signer ou de l'identifier.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations utilisées tout au long du sujet.

Ensembles. On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ l'ensemble des rationnels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

– On note également $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\mathbf{Q}_+ = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}$, $\mathbf{Q}_+^* = \mathbf{Q}_+\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}_+^* = \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$.

– Soit E un ensemble. S'il est fini, on note $\#E$ son cardinal. Soit $A \subset E$. On note $E \setminus A$ le complémentaire de A dans E. On note ensuite $\mathbf{1}_A : E \to \{0,1\}$ la fonction indicatrice de A définie, pour tout x dans E, par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si x est dans A et $\mathbf{1}_A(x) = 0$ sinon.

Nombres complexes. Pour tout nombre complexe z, on note $\overline{z}$ son conjugué, $|z|$ son module, $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire. Pour tout réel σ_0, on note $\mathbf{H}_{\sigma_0}$ le demi-plan ouvert

$$\mathbf{H}_{\sigma_0} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(z) > \sigma_0\} .$$

On rappelle que pour tout nombre complexe z, il existe des réels θ, appelés *arguments* de z, tels que $z = |z|e^{i\theta}$. Si z est non nul, on appelle *argument principal de* z l'unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. On le note $\arg(z)$. On rappelle que $e^{i\theta} = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = 2\pi k$.

Fonctions. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x et $\lceil x \rceil$ la *partie entière supérieure* de x, c'est-à-dire $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbf{Z} : k \leq x\}$ et $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbf{Z} : x \leq k\}$.
Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\mathtt{m}_p : t \mapsto t^p$ la *fonction monômiale de degré* p définie sur $[0,1]$.

– Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions bornées $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est noté $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$. On rappelle que $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach.

– Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est une quantité finie. Dans ce cas, l'intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est un élément de $\mathbf{C}$.

– Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbf{R}$. Sa *transformée de Fourier* est alors une fonction continue, bornée, bien définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2i\pi xt)\,\mathrm{d}t .$$

On rappelle ensuite la *formule d'inversion de Fourier*: si f est continue et si $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \widehat{\widehat{f}}(-t) = f(t) .$$

Fonctions holomorphes. Pour tout ouvert non vide U de $\mathbf{C}$, on note $\mathcal{H}(U)$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions holomorphes sur U. Soit V un ouvert non vide de $\mathbf{C}$ et soient f dans $\mathcal{H}(U)$ et g dans $\mathcal{H}(V)$. On rappelle que si $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$.

– On rappelle le *principe des zéros isolés* sous la forme suivante: soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et soit f dans $\mathcal{H}(U)$. Supposons que l'ensemble $\{z \in U \,:\, f(z) = 0\}$ contient un point d'accumulation dans U: alors f est identiquement nulle sur U.

– Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{H}(U)$. On suppose que la série de fonctions de terme général $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est normalement convergente sur tout compact de U. Alors, $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est holomorphe sur U, la série des dérivées $(u_n')_{n\in\mathbf{N}^*}$ est également normalement convergente sur tout compact de U et
$f' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$.

– Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbf{R}$. Soit $f : U \times I \to \mathbf{C}$ satisfaisant

(a) Pour tout t dans I, $f(\cdot, t) \in \mathcal{H}(U)$.

(b) Pour tout z dans U, $f(z, \cdot)$ est continue par morceaux sur I.

(c) Il existe une fonction g continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(z,t)| \leq g(t)$ pour tout $(z,t) \in U \times I$.

Alors, l'intégrale à paramètre $z \mapsto F(z) = \int_I f(z,t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et holomorphe sur U et de même pour $z \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}t$ qui est la dérivée de F.

Logarithme. On note $\log$ le logarithme dit *principal*: c'est l'unique prolongement holomorphe de la fonction logarithme népérien à l'ouvert $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ (on notera donc également $\log$ le logarithme népérien sur $\mathbf{R}_+^*$). On rappelle que, pour tout nombre complexe z de module strictement plus petit que 1, on a $\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$.

Le C-espace vectoriel $\ell_2(\mathbf{N}^*)$. C'est le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des suites $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs complexes telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ soit une quantité finie. Pour tout $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \ell_2(\mathbf{N}^*)$, on note $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ la somme de la série de terme général $(\overline{a}_n b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ qui est absolument convergente: cela définit un produit scalaire hermitien pour lequel $\ell_2(\mathbf{N}^*)$ est un espace de Hilbert.

Distributions tempérées. Le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ des fonctions $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ de classe C^∞ telles que pour tous m, n dans $\mathbf{N}$, $\rho_{m,n}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|)^m |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty$, est la classe de Schwartz (ici, on adopte la convention que $\varphi^{(0)} = \varphi$). On munit $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ de la topologie induite par les semi-normes $(\rho_{m,n})_{m,n\in\mathbf{N}}$.

– Soit une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On note $\langle T \,|\, \varphi \rangle$ la valeur de T en $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. On rappelle que T est continue si et seulement s'il existe C dans $\mathbf{R}_+^*$, p dans $\mathbf{N}^*$ et $(m_k, n_k)_{1\leq k\leq p}$ dans $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})^p$ tels que $|\langle T \,|\, \varphi \rangle| \leq C \max_{1\leq k\leq p} \rho_{m_k,n_k}(\varphi)$ pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Les formes linéaires continues de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ sont appelées *distributions tempérées*: elles forment un $\mathbf{C}$-espace vectoriel noté $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ que l'on munit de la topologie faible, de sorte que toute suite de distributions tempérées $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge faiblement vers T, élément de $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, si et seulement si pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \langle T_n \,|\, \varphi \rangle = \langle T \,|\, \varphi \rangle$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.

– Soit T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$. On rappelle que l'application $\varphi \mapsto -\langle T \,|\, \varphi' \rangle$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. On note cette distribution tempérée T': c'est la *dérivée de T au sens des distributions*. On a donc $\langle T' \,|\, \varphi \rangle = -\langle T \,|\, \varphi' \rangle$ pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

– On note δ_0 la *masse de Dirac* en 0 qui est la distribution tempérée telle que $\langle \delta_0 \,|\, \varphi \rangle = \varphi(0)$, pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Nombres premiers. On note $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ l'indexation strictement croissante des nombres premiers et $\mathscr{P} = \{p_n \,;\, n \geq 1\}$ l'ensemble des nombres premiers.

– Pour tout réel positif x, on note $\mathscr{P}(x) = \{p \in \mathscr{P} \,:\, p \leq x\}$ et $\pi(x) = \#\mathscr{P}(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs à x.

– On introduit la fonction $\Lambda : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p\,, & \text{si } n = p^k \text{ pour un entier } p \text{ premier et un entier } k \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le but de ce problème est de montrer le *théorème des nombres premiers* qui affirme le résultat suivant:

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log x} \ . \qquad (\mathcal{E}q_1)$$

La démonstration passe par l'étude statistique de la fonction Λ. La majeure partie du problème consiste en la démonstration de la limite suivante, qui implique ($\mathcal{E}q_1$),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k) = 1 \ . \qquad (\mathcal{E}q_2)$$

Partie I

Dans cette section sont introduites et étudiées des fonctions utiles dans la suite du problème.

I-1) La fonction Γ. Soit σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto e^{-x}x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. On pose $\Gamma(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\sigma-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer : $\Gamma(\sigma) \in \mathbf{R}_+^*$ et $\Gamma(\sigma+1) = \sigma\Gamma(\sigma)$.

I-2) La fonction ζ. On rappelle que la série de terme général $(n^{-\sigma})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente, pour tout réel $\sigma > 1$. On introduit alors la fonction ζ définie pour $\sigma > 1$ par

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \ . \qquad (\mathcal{E}q_3)$$

I-2a) Montrer que ζ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, de classe C^1 sur $]1, +\infty[$. Montrer que $-\zeta'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}\log n$, pour tout réel $\sigma > 1$.

I-2b) Par comparaison série-intégrale, montrer que $\lim_{\sigma\to0^+} \sigma\zeta(1+\sigma) = 1$.

I-3) Dans le groupe de questions qui suit, on fixe un réel $\alpha > 0$.

I-3a) En distinguant les cas $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$ et $\alpha > 2$, tracer l'allure du graphe de la fonction définie sur $]0,1[$ par $t \mapsto (-\log t)^{\alpha-1}$.

I-3b) Si $\alpha \geq 1$, montrer qu'il existe c_α dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $0 \leq (-\log t)^{\alpha-1} \leq c_\alpha/\sqrt{t}$ pour tout t dans $]0,1]$. Si $\alpha \in]0,1[$, montrer qu'il existe c'_α dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $0 \leq (-\log t)^{\alpha-1} \leq c'_\alpha(1-t)^{-(1-\alpha)}$ pour tout t dans $]0,1[$.

I-3c) Montrer que pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, donc **bornée** (on l'admettra), la fonction définie sur $]0,1[$ par $t \mapsto f(t)(-\log t)^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1[$.
On note alors

$$\Lambda_\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 f(t)(-\log t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \ .$$

I-3d) Vérifier que Λ_α est linéaire sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$.
Calculer $\Lambda_\alpha(\mathtt{m}_p)$ en fonction de α, p.

I-3e) Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0,1]$, montrer que $|\Lambda_\alpha(f)| \leq \|f\|_\infty$.

I-3f) On définit la fonction $J : [0,1] \to \mathbf{R}$ en posant

$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, e^{-1}[\,, \\ 1/t & \text{si } t \in [e^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Pour tout réel ε dans $]0, e^{-1}[$, déterminer deux fonctions f_ε et h_ε continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que pour tout t dans $[0,1]$, $0 \leq f_\varepsilon(t) \leq J(t) \leq h_\varepsilon(t) \leq e$ et telles que $h_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) = J(t)$ dès que $|t - e^{-1}| > \varepsilon$. Représenter sur un même graphe f_ε, J et h_ε.

I-3g) On admet que $e^{-1/2} - e^{-1} > e^{-1} - e^{-2}$. Soient ε dans $]\,0, e^{-1} - e^{-2}[$ et t dans $[e^{-1} - \varepsilon, e^{-1} + \varepsilon]$. Montrer que $1/2 \leq -\log t \leq 2$ puis, pour tout α dans $\mathbf{R}_+^*$, que $(-\log t)^{\alpha-1} \leq 2^{\alpha+1}$. Montrer enfin que

$$\Lambda_\alpha(f_\varepsilon) \leq \Lambda_\alpha(J) \leq \Lambda_\alpha(h_\varepsilon) \leq \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) + \frac{e2^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)}\,\varepsilon\ .$$

I-4) Dans ce groupe de questions, on suppose ($\mathcal{E}q_2$) vérifié et on veut montrer que cela implique ($\mathcal{E}q_1$).

I-4a) Pour x dans $[1, +\infty[$, on pose $\psi(x) = \sum_{n\in[1,x]\cap\mathbf{N}} \Lambda(n)$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)/x = 1$.

I-4b) On note $\log_p$ le logarithme en base p, défini par $\log_p t = \log t/\log p$ pour tous t dans $\mathbf{R}_+^*$ et p dans $]1, +\infty[$. Soit x dans $[1, +\infty[$. Pour tout p dans $\mathscr{P}$, calculer $\#\big([0, x] \cap \{p^k ; k \in \mathbf{N}^*\}\big)$, *i.e.* le nombre de puissances d'exposant strictement positif de p qui sont inférieures à x (s'il y en a). En déduire que

$$\psi(x) = \sum_{p\in\mathscr{P}(x)} \lfloor \log_p x \rfloor \log p\ .$$

Montrer que $\liminf_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \geq 1$.

I-4c) Soient β dans $]0, 1[$ et x dans $[1, +\infty[$. Montrer que

$$(\pi(x) - x^\beta)\log x \ \leq\ \beta^{-1} \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ x^\beta<p\leq x}} \log p \ \leq\ \beta^{-1}(\psi(x) - \psi(x^\beta)) \leq \beta^{-1}\psi(x)\ .$$

En déduire que $\limsup_{x\to+\infty}(x^{-1}\pi(x)\log x) \leq 1/\beta$.

I-4d) Montrer que ($\mathcal{E}q_2$) implique ($\mathcal{E}q_1$).

I-5) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$\lim_{t\to+\infty} t^2\big(|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\big) = \lim_{t\to-\infty} t^2\big(|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|\big) = 0\ .$$

I-5a) Montrer que f, f' et f'' sont intégrables sur $\mathbf{R}$.

I-5b) Soit x un réel. Comparer $-4\pi^2x^2\widehat{f}(x)$ et $\widehat{(f'')}(x)$.

I-5c) Montrer que $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

I-6) Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On suppose qu'il existe un réel σ_0 tel que la série de terme général $(|a_n|n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente dans $\mathbf{R}_+$.

I-6a) Montrer que pour tout s dans $\mathbf{H}_{\sigma_0}$, la série de terme général $(a_n n^{-s})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente.

On note $\varphi_{\mathbf{a}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ sa somme qui est appelée *série de Dirichlet associée à* $\mathbf{a}$.

I-6b) Montrer que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_{\sigma_0}$.

I-6c) Montrer que $\lim_{\sigma\to+\infty} \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_1$.
Soit un entier $n_0 \geq 2$. On suppose que $a_1 = \ldots = a_{n_0-1} = 0$. Montrer que $\lim_{\sigma\to+\infty} n_0^\sigma \varphi_{\mathbf{a}}(\sigma) = a_{n_0}$.

I-6d) Soit $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ telle que la série de terme général $(|b_n|n^{-\sigma_0})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente dans $\mathbf{R}_+$. On suppose que les séries de Dirichlet $\varphi_{\mathbf{a}}$ et $\varphi_{\mathbf{b}}$ coïncident sur un ouvert non vide de $\mathbf{H}_{\sigma_0}$. Montrer que $a_n = b_n$, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$.

I-7) Une application. Pour k, n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $e_n(k) = n^{-1-\frac{1}{k}i}$ et on pose $\mathbf{e}(k) = (e_n(k))_{n\in\mathbf{N}^*}$. Le but de ce groupe de questions est de montrer que les suites $(\mathbf{e}(k))_{k\in\mathbf{N}^*}$ engendrent un espace vectoriel noté V qui est dense dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, l'espace des suites de carré sommable.

Tournez la page S.V.P.

I-7a) Montrer que pour tout k dans $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{e}(k) \in \ell_2(\mathbf{N}^*)$.

I-7b) Montrer que pour tout $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$, $\varphi_{\mathbf{a}}$ est holomorphe sur $\mathbf{H}_{1/2}$.

I-7c) Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans $\ell_2(\mathbf{N}^*)$. On suppose pour tout $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ dans V que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Montrer que $\varphi_{\mathbf{a}}$ est identiquement nulle sur $\mathbf{H}_{1/2}$ et conclure.

I-8) Montrer que la fonction ζ définie sur $]1, +\infty[$ par $(\mathcal{E}q_3)$ se prolonge de manière unique en une fonction, toujours notée ζ, holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$ et montrer que $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.
Montrer que les séries de Dirichlet associées aux suites $(\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont bien définies et holomorphes sur $\mathbf{H}_1$. (*Indication: on pourra utiliser que* $\Lambda(n) \leq \log n$.)

On utilisera les notations suivantes.

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-s} \quad \text{et} \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}. \qquad (\mathcal{E}q_4)$$

I-9) Cette question porte sur des propriétés élémentaires de la détermination principale du logarithme.

I-9a) Pour tout z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, on note $h(z) = \exp(\log z)$. Justifier que h est holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ et montrer que $h(z) = z$, pour tout z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. (*Indication: considérer d'abord le cas z réel.*)

I-9b) Pour z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$, montrer que $\mathrm{Re}\,(\log z) = \log|z|$ et que $\exp(i\ \mathrm{Im}\,(\log z)) = z/|z|$.

I-9c) Soit z dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. Pour tout θ dans $]-\pi, \pi[$, on pose $f(\theta) = \mathrm{Im}\,(\log(|z|e^{i\theta})) - \theta$. Justifier que f est bien définie et à valeurs dans $2\pi\mathbf{Z}$.
En déduire : $\mathrm{Im}\,(\log z) \in]-\pi, \pi[$ et $\log z = \log|z| + i\arg(z)$.

I-9d) Trouver deux complexes z_1, z_2 dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$ tels que :

$$z_1 z_2 \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- \text{ et } \log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2.$$

I-9e) Soit $z_0 = 2e^{-i\pi/4}$. Déterminer et représenter sur un dessin l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- : z_0 z \in \mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_- \text{ et } \log(z_0 z) = \log z_0 + \log z\}.$$

Partie II

Le but des trois questions suivantes est de montrer que pour toute suite $(\ell_p)_{p\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, décroissante et vérifiant pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$ l'égalité $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$, on a l'alternative suivante: $\ell_p = 0$ pour tout $p \geq 2$, ou il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout $p \geq 1$.

II-1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction **croissante** satisfaisant la propriété

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)\ . \qquad (\mathcal{E}q_5)$$

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $f(x) = \alpha x$, pour tout réel x.

II-2) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbf{R}$. On suppose que G est une partie dense dans $\mathbf{R}$. Soit $g : G \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que pour tous s, t dans G, on ait $g(s+t) = g(s) + g(t)$.

II-2a) Soit x dans $\mathbf{R}$. On pose $J(x) = \{g(s)\,; s \in G\cap]x, +\infty[\}$. Montrer que $J(x)$ est non vide minoré.

On note $f(x) = \inf J(x)$, la borne inférieure de $J(x)$.

II-2b) Montrer que f est croissante et continue à droite.

II-2c) Soient x un réel et t dans G. Montrer que $\{s \in G : s > x+t\} = \{s'+t \,;\, s' \in G \cap]x,+\infty[\}$. Montrer que $f(x+t) = f(x) + g(t)$.

II-2d) En déduire que f satisfait la propriété ($\mathcal{E}q_5$).

II-2e) Montrer que f prolonge g et qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+$ tel que $g(s) = \alpha s$ pour tout $s \in G$.

II-3) Soit $(\ell_p)_{p \in \mathbf{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ qui n'est pas identiquement nulle. On fait les deux hypothèses suivantes: $(\ell_p)_{p \geq 1}$ est décroissante et pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$, $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$.

II-3a) Calculer ℓ_1 et montrer que l'on a l'alternative suivante: $\ell_p > 0$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, ou $\ell_p = 0$ pour tout entier $p \geq 2$.

Dans les questions suivantes de ce groupe de questions, on suppose que $\ell_p > 0$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$.

II-3b) Montrer qu'il existe une unique fonction $h : \mathbf{Q}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ telle que $h(p) = \ell_p$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$ et telle que : $\forall r_1, r_2 \in \mathbf{Q}_+^*,\ h(r_1 r_2) = h(r_1) h(r_2)$.

II-3c) Montrer que h est décroissante.

II-3d) En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout entier $p \geq 1$. (*Indication: on pourra considérer la fonction g telle que $g(\log s) = -\log h(s)$ pour $s \in \mathbf{Q}_+^*$.*)

Dans les questions suivantes de cette partie, $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ **non identiquement nulle** et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite **strictement croissante** de réels positifs tendant vers $+\infty$. On formule l'hypothèse suivante:

(H) : *Pour tout σ dans $\mathbf{R}_+^*$, la série de terme général $(a_n e^{-\lambda_n \sigma})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathbf{R}_+^*$ et sa somme, notée $D(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma}$, est telle que, pour tout p dans $\mathbf{N}^*$, $D(p\sigma)/D(\sigma)$ a une limite finie notée ℓ_p lorsque σ tend vers 0^+.*

II-4) On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfont (H).

II-4a) Calculer ℓ_1 et montrer que pour tous p, q dans $\mathbf{N}^*$, on a $\ell_{pq} = \ell_p \ell_q$.

II-4b) Montrer l'alternative suivante: $\ell_p = 0$ pour tout entier $p \geq 2$ ou il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\ell_p = p^{-\alpha}$ pour tout p dans $\mathbf{N}^*$.

Dans la suite, on ne considère que les cas où les ℓ_p sont strictement positifs. Plus précisément, pour tout réel $\alpha \geq 0$, on introduit l'hypothèse suivante:

(H_α) : $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *et* $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ *satisfont (H) et* $\lim_{\sigma \to 0^+} D(p\sigma)/D(\sigma) = p^{-\alpha}$, *pour tout p dans* $\mathbf{N}^*$.

L'objectif principal de la fin de cette partie est de prouver le résultat suivant: pour tout réel $\alpha \geq 0$ et pour toutes suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfaisant (H_α), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{D(\lambda_n^{-1})} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} . \qquad (\mathcal{E}q_6)$$

II-5) Soit α un réel ≥ 0. On suppose que les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ satisfont (H_α).

II-5a) Soient f dans $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$ et σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série de terme général $(a_n f(e^{-\lambda_n \sigma}) e^{-\lambda_n \sigma})_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente. On note alors

$$\Lambda_{\alpha,\sigma}(f) = \frac{1}{D(\sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(e^{-\lambda_n \sigma}) e^{-\lambda_n \sigma}.$$

II-5b) Soit σ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $\Lambda_{\alpha,\sigma}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$. Montrer également que pour tout f dans $\mathcal{B}([0,1], \mathbf{R})$, on a $|\Lambda_{\alpha,\sigma}(f)| \leq \|f\|_\infty$.

II-6) Dans ce groupe de questions, on suppose que α est un réel > 0. On suppose également que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont (H_α). On montre $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$ dans ces cas.

II-6a) On rappelle la définition de $\Lambda_\alpha(\cdot)$ de la question **I-3c**. Montrer que pour toute fonction polynômiale Q à coefficients réels on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(Q) = \Lambda_\alpha(Q)$.

II-6b) Montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue, on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(f) = \Lambda_\alpha(f)$. (*Indication: on pourra penser au théorème de Weierstrass* .)

II-6c) Soit ε dans $]\,0, e^{-1} - e^{-2}[$. On rappelle les fonctions J, f_ε et h_ε de la question **I-3f**. Montrer qu'il existe un réel $\sigma_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \sigma \in]0, \sigma_\varepsilon],\ \Lambda_\alpha(f_\varepsilon) - \varepsilon \leq \Lambda_{\alpha,\sigma}(J) \leq \Lambda_\alpha(h_\varepsilon) + \varepsilon\ .$$

On pose ensuite $C_\alpha = 1 + e2^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)^{-1}$. Montrer :

$$\forall \sigma \in]0, \sigma_\varepsilon],\ |\Lambda_{\alpha,\sigma}(J) - \Lambda_\alpha(J)| \leq C_\alpha \varepsilon.$$

II-6d) Montrer que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{\alpha,\sigma}(J) = \Lambda_\alpha(J)$. Conclure quant à $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$.

II-7) Dans ce groupe de questions, on suppose que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ satisfont (H_0). On montre $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$ dans ces cas.

II-7a) On pose $g(t) = (1-t)^2$, pour t dans $[0,1]$. Montrer que $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{0,\sigma}(g) = 0$.

II-7b) Soit δ dans $]0,1[$. Montrer que, pour tout réel $\sigma > 0$, on a : $0 \leq \Lambda_{0,\sigma}(\mathbf{1}_{[0,1-\delta]}) \leq \delta^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g)$.

II-7c) Soit f dans $\mathcal{B}([0,1],\mathbf{R})$. Soit δ dans $]0,1[$ et soit σ un réel > 0. Montrer que

$$\left|f(1) - \Lambda_{0,\sigma}(f)\right| \leq \max_{t\in[1-\delta,1]} |f(1) - f(t)| + 2\|f\|_\infty \delta^{-2}\Lambda_{0,\sigma}(g)\ .$$

En déduire que si f est continue à gauche en 1, on a $\lim_{\sigma\to 0^+}\Lambda_{0,\sigma}(f) = f(1)$.

II-7d) En déduire $(\boldsymbol{\mathcal{E}q}_6)$ dans le cas où $\alpha = 0$.

Partie III

III-1) Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On note D_φ l'ensemble des réels σ tels que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \varphi(x)x^{\sigma-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

III-1a) Montrer que D_φ est un intervalle de $\mathbf{R}$ (on rappelle que l'ensemble vide et les singletons sont des intervalles de $\mathbf{R}$).

III-1b) On suppose D_φ non vide. Soit un nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \in D_\varphi$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \varphi(x)x^{s-1}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. On pose alors

$$\mathcal{M}\varphi(s) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)x^{s-1}\mathrm{d}x\ . \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_7)$$

La fonction $\mathcal{M}\varphi$ définie ainsi est appelée la *transformée de Mellin de* φ.

III-1c) On suppose que D_φ contient deux réels $\sigma_0 < \sigma_1$. Montrer que $\mathcal{M}\varphi$ est holomorphe sur l'ouvert $\{s \in \mathbf{C} : \sigma_0 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_1\}$.

III-1d) Si $\varphi(x) = e^{-x}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, montrer que $D_\varphi =]0, +\infty[$, puis que $\mathcal{M}\varphi$ est l'unique fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_0$ qui prolonge la fonction Γ (définie en **I-1**) à $\mathbf{H}_0$.
On continuera dans la suite du sujet de noter Γ ce prolongement holomorphe:

$$\forall s \in \mathbf{H}_0, \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x. \qquad (\boldsymbol{\mathcal{E}q}_8)$$

III-1e) Montrer : $\forall s \in \mathbf{H}_0, \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \Gamma(s+k) = (s+k-1)(s+k-2)\dots s\Gamma(s)$.
(*Indication: on pourra éventuellement utiliser **I-1**.*)

III-1f) Pour tout réel y, montrer que $\sqrt{1+y^2} \geq 2^{-\frac{1}{2}}(1+|y|)$. Soit k un entier naturel. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \geq 1$, montrer que $|s+k| \geq 2^{-\frac{1}{2}}(1+|\mathrm{Im}(s)|)$.

III-1g) Soit σ_0 dans $]1,+\infty[$; on pose $M_{k,\sigma_0} = 2^{k/2}(1+\Gamma(\sigma_0+k+1))$. Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) \in [1,\sigma_0]$, montrer que

$$|\Gamma(s)| \leq \frac{M_{k,\sigma_0}}{(1+|\mathrm{Im}(s)|)^k} .$$

III-2) Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On suppose que D_φ n'est pas vide. Soit σ un réel. Pour tout v dans $\mathbf{R}$, on pose $\Phi_\sigma(v) = \varphi(e^{-2\pi v})e^{-2\pi\sigma v}$.

III-2a) Montrer que Φ_σ est intégrable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\sigma \in D_\varphi$.

III-2b) On suppose que $\sigma \in D_\varphi$. Montrer que pour tout réel t, on a $\mathcal{M}\varphi(\sigma+it) = 2\pi\widehat{\Phi}_\sigma(t)$.

III-2c) On suppose de plus $\widehat{\Phi}_\sigma$ intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans D_φ que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}\varphi(\sigma+it)x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t ,$$

qui est la *formule d'inversion de la transformée de Mellin* .

III-2d) Dans cette question, on considère le cas où $\varphi(x) = e^{-x}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer alors que pour tout σ dans $\mathbf{R}_+^*$, $\widehat{\Phi}_\sigma$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. (*Indication: on pourra d'abord montrer que* $\Phi'_\sigma(v) = 2\pi\Phi_\sigma(v)(e^{-2\pi v}-\sigma)$, *ensuite poser* $t = e^{-2\pi v}$ *puis utiliser la question **I-5**.*)

III-2e) Montrer que pour tous x, σ dans $\mathbf{R}_+^*$ on a $e^{-x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t$. En déduire pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $]1,+\infty[$, que

$$\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\sigma+it)}{\sigma-1+it}\,x^{-\sigma-it}\,\mathrm{d}t .$$

Les questions suivantes forment une partie indépendante dont le but est de calculer la transformée de Fourier au sens des distributions tempérées (dont la définition est rappelée dans la question **III-5**) de la fonction $2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$.

III-3) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction continue, sauf peut-être en 0.
On suppose d'une part que $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ et d'autre part qu'il existe (k, C) dans $\mathbf{N}\times\mathbf{R}_+^*$ tels que pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$ on ait $|f(x)| \leq C(1+|x|)^k$.
Montrer que pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $f\varphi$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$. Puis montrer que la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ par $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^0 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est continue.

On note T_f cette distribution tempérée: c'est la *distribution représentant* f définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \quad \langle T_f \mid \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x .$$

III-4) Pour tout x dans $\mathbf{R}^*$, on pose $\ell_0(x) = \log|x|$, $\ell(x) = \log(ix)$ et $\mathtt{sgn}(x) = x/|x|$.
On pose $\ell_0(0) = \ell(0) = \mathtt{sgn}(0) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose également $q_\varepsilon(x) = (x - i\varepsilon)^{-1}$.

III-4a) Soit φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon \int_{-1}^{1} (x^2 + \varepsilon^2)^{-1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \pi\varphi(0)$. (*Indication: on pourra calculer d'abord* $\varepsilon \int_{-1}^{1} (x^2 + \varepsilon^2)^{-1}\,\mathrm{d}x$.)

III-4b) Montrer que $\ell = \ell_0 + i\frac{\pi}{2}\mathtt{sgn}$ et que pour toute fonction $f \in \{\ell_0, \mathtt{sgn}, \ell, q_\varepsilon\}$, T_f est une distribution tempérée.

III-4c) Soit φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction V_φ continue sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{R}^*$, $V_\varphi(x) = x^{-1}(\varphi(x) - \varphi(0))$. Montrer que la forme linéaire $\mathtt{VP}$ sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ donnée par

$$\langle \mathtt{VP} \,|\, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

est bien continue sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

III-4d) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $x \mapsto x^{-1}\varphi(x)1_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer ensuite que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = \langle \mathtt{VP} \,|\, \varphi \rangle$$

III-4e) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-1}\varphi(x)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x = (\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))\log(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\log(|x|)\mathbf{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire que $T'_{\ell_0} = \mathtt{VP}$.

III-4f) Montrer que $T'_{\mathtt{sgn}} = 2\delta_0$, puis montrer que $T'_\ell = \mathtt{VP} + i\pi\delta_0$.

III-4g) Soient φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que

$$\langle T_{q_\varepsilon} \,|\, \varphi \rangle = \int_{-1}^{1} V_\varphi(x)\frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + i\varepsilon \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(|x|)\,\mathrm{d}x\ .$$

En déduire que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} T_{q_\varepsilon} = \mathtt{VP} + i\pi\delta_0$.

III-5) Soit T dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, une distribution tempérée. On rappelle que la transformée de Fourier est un endomorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Cela garantit que la forme linéaire définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ par $\varphi \mapsto \langle\, T \,|\, \widehat{\varphi} \rangle$ est continue. On note $\widehat{T}$ cette distribution tempérée; c'est la *transformée de Fourier de* T.

III-5a) Démontrer que la distribution $T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}}$ associée à $2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ est tempérée.

III-5b) Soit ε un réel > 0. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $Y_\varepsilon : x \mapsto 2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x)e^{-2\pi\varepsilon x}$.

III-5c) Pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$, montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle T_{Y_\varepsilon} \,|\, \varphi \rangle = \langle T_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} \,|\, \varphi \rangle$.

III-5d) Montrer que $\widehat{T}_{2\pi\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}} = -iT'_\ell$.

Partie IV

On rappelle ici le *théorème fondamental de l'arithmétique:* à tout entier $n > 0$, on associe une **unique** famille $v_p(n) \in \mathbf{N}$, $p \in \mathscr{P}$, telle que d'une part l'ensemble $\{p \in \mathscr{P} : v_p(n) \neq 0\}$ soit fini et telle que d'autre part on ait $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(n)}$. On appelle le nombre $v_p(n)$ la *valuation p-adique* de n.

IV-1) Le but du groupe de questions suivant est de montrer par des arguments probabilistes que pour tout σ dans $]1,+\infty[$,

$$\zeta(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{1\leq k\leq n} \left(1 - p_k^{-\sigma}\right)^{-1}, \qquad (\mathcal{E}q_9)$$

où l'on rappelle que $(p_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ désigne l'indexation strictement croissante des nombres premiers. Pour cela, on fixe σ dans $]1,+\infty[$ et on spécifie l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ comme suit: on pose $\Omega = \mathbf{N}^*$, la tribu $\mathscr{F}$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbf{N}^*$ et la mesure de probabilité $\mathbf{P}$ est caractérisée par

$$\mathbf{P}(\{n\}) = \frac{1}{n^\sigma \zeta(\sigma)}, \quad n \in \mathbf{N}^* .$$

Pour tout q dans $\mathbf{N}^*$, on note $q\mathbf{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs divisibles par q, c'est-à-dire $q\mathbf{N}^* = \{qn\,;\, n\in\mathbf{N}^*\}$.

IV-1a) Exprimer $\mathbf{P}(q\mathbf{N}^*)$ en fonction de σ et q.

IV-1b) Pour tout $n\geq 1$, on pose $A_n = p_n\mathbf{N}^*$. Montrer que les événements A_n, $n\geq 1$, sont mutuellement indépendants.

IV-1c) Conclure.

IV-2) On rappelle que ζ est une fonction de classe C^1 strictement positive sur $]1,+\infty[$. Montrer que pour tout σ dans $]1,+\infty[$, $\log\zeta(\sigma) = -\sum_{n=1}^\infty \log(1-p_n^{-\sigma})$. Montrer ensuite que pour tout σ dans $]1,+\infty[$

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\log p_n}{p_n^\sigma - 1} .$$

IV-3) Soit Φ comme dans ($\mathcal{E}q_4$). Montrer que $\Phi(\sigma) = -\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma)$ pour tout réel $\sigma > 1$.

IV-4) On rappelle la définition ($\mathcal{E}q_4$) de la fonction Z.

IV-4a) Pour tout réel x dans $[0,1/2]$, montrer que $0 \leq -\log(1-x) - x \leq x^2$.

IV-4b) Pour tout σ dans $]1,+\infty[$, on pose $f(\sigma) = -Z(\sigma) + \log\zeta(\sigma)$. Montrer que f est positive décroissante et majorée sur $]1,+\infty[$.

IV-4c) En déduire que $\lim_{\sigma\to 0^+} Z(1+\sigma)/\log(\sigma^{-1}) = 1$.

IV-4d) À l'aide de ($\mathcal{E}q_6$), en déduire que $\lim_{n\to+\infty} (\log\log n)^{-1} \sum_{1\leq k\leq n} k^{-1}\mathbf{1}_{\mathscr{P}}(k) = 1$.

Partie V

V-1) On rappelle le résultat de la question **I-8**: la fonction ζ, définie par ($\mathcal{E}q_3$), se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_1$. Le but de ce groupe de questions est de montrer qu'il existe une fonction L holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$ telle que $\exp L(s) = \zeta(s)$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.

V-1a) Soit Z comme en ($\mathcal{E}q_4$). Soit s dans $\mathbf{H}_1$. Montrer que $\sum_{k=1}^\infty k^{-1}|Z(ks)| \leq \log\zeta(\mathrm{Re}(s))$ à l'aide de la partie **IV**. On pose alors

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad L(s) = \sum_{k=1}^\infty k^{-1} Z(ks) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{k p_n^{ks}} .$$

V-1b) Montrer que L est holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

V-1c) Montrer que $\exp L(s) = \zeta(s)$ pour tout s dans $\mathbf{H}_1$. (*Indication: calculer d'abord* $\exp L(\sigma)$ *pour* σ *dans* $]1, +\infty[$ *à l'aide de la partie **IV**.*)

V-1d) En déduire que ζ ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$.

V-1e) Soit Φ comme en ($\mathcal{E}q_4$). Montrer que $\Phi(s) = -\zeta'(s)/\zeta(s)$, pour tout s dans $\mathbf{H}_1$.

V-2) Le but de ce groupe de questions est de prolonger ζ en une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}_0 \setminus \{1\}$. Pour cela, on introduit $v_n(s) = \int_n^{n+1} (n^{-s} - x^{-s})\, \mathrm{d}x$ pour n dans $\mathbf{N}^*$ et s dans $\mathbf{C}$.

V-2a) Soit s dans $\mathbf{H}_1$. Montrer que la série de terme général $(v_n(s))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente et montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$.

V-2b) Soient s dans $\mathbf{H}_0$ et n dans $\mathbf{N}^*$. Montrer que $v_n(s) = s \int_n^{n+1} (\lceil x \rceil - x) x^{-1-s}\, \mathrm{d}x$. Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $x \mapsto (\lceil x \rceil - x) x^{-1-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, puis que

$$\forall s \in \mathbf{H}_1, \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} (\lceil x \rceil - x)\, x^{-1-s}\, \mathrm{d}x \,. \qquad (\mathcal{E}q_{10})$$

V-2c) Montrer que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_0$ avec un unique pôle simple en $s = 1$. On notera encore ζ ce prolongement.

V-3) Dans ce groupe de questions, on montre que $\zeta(1 + it) \neq 0$ pour tout t dans $\mathbf{R}^*$.

V-3a) Pour tout réel θ, on pose $q(\theta) = 5 + 8\cos(\theta) + 4\cos(2\theta) + \cos(3\theta)$. Exprimer $q(\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$. En déduire que q est une fonction positive.

V-3b) Soient σ dans $]1, +\infty[$ et t dans $\mathbf{R}$. Montrer que

$$\zeta(\sigma)^5 |\zeta(\sigma + it)|^8 |\zeta(\sigma + 2it)|^4 |\zeta(\sigma + 3it)| = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(kt \log p_n)}{k p_n^{k\sigma}} \Big).$$

En déduire que $\zeta(\sigma)^5 |\zeta(\sigma + it)|^8 |\zeta(\sigma + 2it)|^4 |\zeta(\sigma + 3it)| \geq 1$.

V-3c) Supposons qu'il existe un réel non nul t_0 tel que $\zeta(1 + it_0) = 0$.
Montrer que $\lim_{\sigma \to 1^+} \zeta(\sigma)\zeta(\sigma + it_0) = \zeta'(1 + it_0)$. En déduire une contradiction et conclure.

V-4) Soient σ dans $[1, +\infty[$ et un réel t tel que $|t| \geq 1$.

V-4a) À l'aide de ($\mathcal{E}q_{10}$), démontrer que $|\zeta(\sigma + it)| \leq |t| + 2 \leq 3|t|$.

V-4b) Montrer de même que $|\zeta'(\sigma + it)| \leq 4|t|$.

V-5) Dans les questions suivantes, on montre l'existence d'un réel $M > 0$ tel que

$$\forall \sigma \in [1, 2], \forall t \in \mathbf{R} \text{ tel que } |t| \geq 1, \quad |\zeta(\sigma + it)|^{-1} \leq M |t|^{11/2} \,.$$

Dans ce qui suit, t est un réel fixé tel que $|t| \geq 1$.

V-5a) Montrer que pour tout réel σ dans $[1, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{\zeta(\sigma + it)} = \frac{1}{\zeta(\sigma + 1 + it)} + \int_{\sigma}^{\sigma+1} \frac{\zeta'(x + it)}{\zeta^2(x + it)}\, \mathrm{d}x \,.$$

V-5b) Soit σ dans $[1, +\infty[$. Montrer que $0 \leq \zeta(\sigma + 1) - 1 - 2^{-1-\sigma} \leq \sigma^{-1} 2^{-\sigma}$, par comparaison série-intégrale. En déduire que $|\zeta(\sigma + 1 + it)|^{-1} \leq 4$.

V-5c) En utilisant **V-3b** et les questions précédentes, montrer $|\zeta(x + it)|^{-2} \leq 2.3^{11/4} |t|^{5/4} (x-1)^{-5/4}$ pour tout réel x dans $]1, 3]$.

V-5d) Pour tout σ dans $]1,2]$, montrer que

$$|\zeta(\sigma+it)|^{-1} \leq 4+2^5 3^{11/4}|t|^{9/4}\big((\sigma-1)^{-1/4}-\sigma^{-1/4}\big) \leq 2^6 3^{11/4}|t|^{9/4}(\sigma-1)^{-1/4}.$$

V-5e) Conclure en réemployant cette inégalité.

V-6) Montrer que Φ se prolonge continûment à l'ensemble fermé $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1 \text{ et } |\mathrm{Im}(s)| \geq 1\}$. Montrer ensuite que pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t tel que $|t| \geq 1$ on a $|\Phi(\sigma+it)| \leq 4M|t|^{13/2}$, où le réel M est celui introduit à la question **V-5**.

Partie VI

Dans cette section on complète la démonstration de (***Eq***$_1$).

VI-1) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série de terme général $(e^{-nx}\Lambda(n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathbf{R}_+$. Montrer que la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Lambda(n)$ est continue.
On note désormais, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\Lambda(n)$.

VI-2) On rappelle la définition (***Eq***$_7$) de la transformée de Mellin de φ. Montrer que $\mathcal{M}\varphi$ est bien définie et holomorphe sur l'ouvert $\mathbf{H}_1$. Calculer explicitement $\mathcal{M}\varphi$ sur $\mathbf{H}_1$.

VI-3) Soit σ dans $]1,2]$. Montrer que la fonction $t \in \mathbf{R} \mapsto \mathcal{M}\varphi(\sigma+it)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. (*Indication: on pourra utiliser les questions **III-1g** et **V-6**.*)

VI-4) Déduire des questions précédentes que pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $]1,2]$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-nx} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}x^{-(\sigma+it)}\,\mathrm{d}t$$

VI-5) Pour tout s dans $\mathbf{H}_1$, on pose $h(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1}$.

VI-5a) Démontrer que h se prolonge continûment à $\{s \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$. (*Indication: on pourra utiliser le prolongement de la fonction $s \mapsto \zeta(s)-(s-1)^{-1}$ à $\mathbf{H}_0$ de la question **V-2**.*)

VI-5b) Montrer l'existence d'un réel $K_1 > 0$ tel que $|h(\sigma+it)| \leq K_1(1+|t|^{13/2})$, pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t.

VI-5c) Montrer l'existence d'un réel $K_2 > 0$ tel que $|\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)| \leq K_2(1+|t|)^{-3/2}$ pour tout σ dans $[1,2]$ et tout réel t. Pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$ et tout σ dans $[1,2]$, en déduire que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $t \in\mapsto \Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

VI-5d) Pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose $I(x) = x^{-1}e^{-x} - \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)e^{-nx}$. Soit σ dans $]1,2]$. Montrer que

$$I(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\sigma+it)h(\sigma+it)x^{-(\sigma+it)}\,\mathrm{d}t\ .$$

VI-5e) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que $xI(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(1+it)h(1+it)e^{-it\log x}\,\mathrm{d}t$.

VI-6) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} xI(x) = 0$.

VI-7) En utilisant (***Eq***$_6$), montrer (***Eq***$_2$) puis (***Eq***$_1$).

9.2 Épreuve écrite de mathématiques générales

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

EAE MAT 1

SESSION 2022

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section
MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales

Durée : 6 heures

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations, vocabulaire et rappels

Soit $\mathbf{F}$ un corps. On note $\mathrm{car}(\mathbf{F})$ sa caractéristique et $\mathbf{F}^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{F}$. On désigne par $\mathbf{F}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{F}$. Pour deux entiers naturels non nuls m et n, on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{F})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbf{F}$; lorsque $m = n$, on note aussi $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{F}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ le groupe formé par le sous-ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$; on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$.

On fixe n un entier $\geqslant 1$. On note $\sim$ la *relation de similitude* sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$:

$$A \sim B \text{ s'il existe } P \text{ dans } \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \text{ telle que } B = PAP^{-1}.$$

On rappelle qu'il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont appelées les *classes de similitude*. Deux matrices dans une même classe de similitude sont dites *semblables*.

Pour un entier $r \geqslant 1$, des entiers $n_1, \ldots, n_r$ tous $\geqslant 1$, et des matrices $A_1, ..., A_r$ telles que A_i appartienne à $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbf{F})$ pour tout entier i compris entre 1 et r, on note $\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r)$ la matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont dans l'ordre $A_1, ..., A_r$. Ainsi, on a :

$$\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+\cdots+n_r}(\mathbf{F}).$$

Pour une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$, on note μ_M son polynôme minimal et χ_M son polynôme caractéristique. La sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ formée par l'ensemble des polynômes en M est notée $\mathbf{F}[M]$.

On dit qu'une matrice N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ tel que $N^k = 0$; on note alors $d(N)$ *l'indice de nilpotence* de N, c'est à dire le plus petit entier k qui vérifie cette propriété.

On pose

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_n(\mathbf{F}),$$

la *matrice de Jordan nilpotente* de taille n.

On pourra utiliser la *décomposition de Jordan* d'un élément N de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$:
il existe un unique entier $r \geqslant 1$, et une unique suite d'entiers $n_1, ..., n_r$ vérifiant $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ et $n_1 + \cdots + n_r = n$ telle que

$$N \sim \operatorname{diag}(J_{n_1}, \dots, J_{n_r}).$$

On dit qu'une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ est *unipotente* s'il existe une matrice nilpotente N telle que $M = I_n + N$.
On note $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$. On définit l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ comme :

$$\mathcal{U}_n(\mathbf{F}) = I_n + \mathcal{N}_n(\mathbf{F}) = \{I_n + N, N \in \mathcal{N}_n(\mathbf{F})\}.$$

Si V et V' sont des $\mathbf{F}$-espaces vectoriels de dimension finie, on note $\operatorname{Hom}_{\mathbf{F}}(V, V')$ le $\mathbf{F}$-espace vectoriel des applications $\mathbf{F}$-linéaires de V dans V'. On pose $\operatorname{End}_{\mathbf{F}}(V) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{F}}(V, V)$, et on note $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(V)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles de $\operatorname{End}_{\mathbf{F}}(V)$; on rappelle que $\mathrm{GL}_{\mathbf{F}}(V)$ est un groupe pour la loi de composition.

On note $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes et $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. Si p est un nombre premier, on note $\mathbf{F}_p$ le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

On rappelle le *théorème de Cauchy* :
Soit G un groupe fini. On note n son ordre. Si p est un nombre premier diviseur de n, alors G contient un élément d'ordre p.

Dans tous les exercices, n désigne un entier $\geqslant 1$.

Exercice 1

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $M^2 = A$ est appelée une *racine carrée* de A. On note $R(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

1. Soient A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que $R(A)$ et $R(B)$ sont en bijection.
2. Soit α dans $\mathbf{C}$. Justifier que $R(\alpha I_n)$ est une réunion de classes de similitude.
3. Déterminer le nombre de classes de similitude dont est constitué $R(I_n)$.
4. Déterminer le nombre de classes de similitude dont est constitué l'ensemble $R(0)$ des racines carrées de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
   Indication : On pourra utiliser la décomposition de Jordan.
5. On suppose, dans cette question, que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. On fixe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que PAP^{-1} est diagonale.
   a) Démontrer que si M est une racine carrée de A, alors PMP^{-1} est également diagonale.
   b) En déduire le nombre de racines carrées de A.
   c) Donner un exemple de matrice de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ diagonalisable dont au moins une racine carrée n'est pas diagonalisable.
6. La matrice $-I_n$ admet-elle des racines carrées dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$?
   On distinguera selon la parité de n.
7. Démontrer que la matrice J_{2n}^2 est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(J_n, J_n)$ et J_{2n+1}^2 à la matrice $\mathrm{diag}(J_n, J_{n+1})$.
8. On suppose dans cette question que A est nilpotente. A est donc semblable à une unique matrice de la forme $\mathrm{diag}(J_{n_1}, \ldots, J_{n_r})$, où r est un entier $\geqslant 1$ et $n_1, \ldots, n_r$ sont des entiers tels que $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ et $n_1 + \cdots + n_r = n$.
   a) Dans le cas où $r = 4$, et $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (3, 4, 4, 4)$, A admet-elle une racine carrée ?
   b) Dans le cas où $r = 4$, et $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (3, 4, 4, 6)$, A admet-elle une racine carrée ?
   c) Dans le cas où $r = 5$, et $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = (1, 1, 1, 3, 3)$, A admet-elle une racine carrée ?
   d) Décrire brièvement, en langage naturel, un algorithme permettant de déterminer si la matrice A admet une racine carrée à partir de la donnée de la suite ordonnée $n_1, \ldots, n_r$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{F}$ un corps.

1. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de la matrice J_n. Que vaut l'indice de nilpotence $d(J_n)$?

2. Soit r un entier naturel $\geqslant 1$. Soit $n_1, ..., n_r$ une famille de r entiers vérifiant $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ et $n_1 + \cdots + n_r = n$. Démontrer que $d(\mathrm{diag}(J_{n_1}, ..., J_{n_r})) = n_r$.
3. Soit N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$.
   a) Démontrer que $\mu_N = X^{d(N)}$.
   b) Déterminer la dimension de $\mathbf{F}[N]$.
4. Soit N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$. Démontrer que $I_n + N$ est une matrice inversible.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\mathrm{car}(\mathbf{F}) \neq 2$.

5. Soit N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$.
   a) Démontrer que $2N + N^2$ est une matrice nilpotente telle que $d(2N + N^2) = d(N)$.
   b) Démontrer l'égalité $\mathbf{F}[2N + N^2] = \mathbf{F}[N]$. En déduire que N est un polynôme en $2N + N^2$.
6. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi & : \mathcal{N}_n(\mathbf{F}) & \to & \mathcal{N}_n(\mathbf{F}) \\ & N & \mapsto & 2N + N^2 \end{array}$$

   a) Démontrer que l'application ϕ est une injection de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.
   b) Soit N dans $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ d'indice $d(N) = n$. Démontrer que $2N + N^2 \sim J_n$.
   c) En déduire que ϕ est une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.
7. En déduire que l'application qui envoie une matrice sur son carré ($U \mapsto U^2$) définit une bijection de $\mathcal{U}_n(\mathbf{F})$ dans lui-même.
8. Dans cette question uniquement, $\mathbf{F}$ est le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$.
   a) Soit M une matrice dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On suppose M diagonalisable. Démontrer qu'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $M = P^2$.
   b) Démontrer que l'application qui envoie une matrice sur son carré ($P \mapsto P^2$) définit une surjection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ sur lui-même. Est-elle injective ?
   Indication : on pourra utiliser la décomposition de Dunford.
9. L'application qui envoie une matrice sur son carré ($P \mapsto P^2$) définit-elle une surjection de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ sur lui-même ?

Exercice 3

Soit p un nombre premier.
On rappelle que, si $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique p, on a l'identité remarquable :

$$(X + Y)^p = X^p + Y^p$$

dans l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbf{k}$ en deux variables X et Y.

Dans cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne un corps algébriquement clos qui contient le corps $\mathbf{F}_p$. Pour x dans $\mathbf{K}$, on pose $\phi_p(x) = x^p$.

1. Justifier que $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique p.

On rappelle alors que ϕ_p est un morphisme du corps $\mathbf{K}$, appelé *morphisme de Frobenius*.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note ϕ_p^k le k-ième itéré de ϕ_p, défini par récurrence sur k :

$$\phi_p^1 = \phi_p \text{ et si } k \geqslant 2,\ \phi_p^k = \phi_p^{k-1} \circ \phi_p.$$

2. Démontrer que ϕ_p est un automorphisme du corps $\mathbf{K}$.
3. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{K},\ \phi_p^k(x) = x^{p^k}.$$

Soit k un entier $\geqslant 1$. On pose $q = p^k$ et $\phi_q = \phi_p^k$. Soit $\mathbf{L} = \{x \in \mathbf{K},\ \phi_q(x) = x\}$.

4. Démontrer que $\mathbf{L}$ est de cardinal inférieur ou égal à q.
5. Démontrer que $\mathbf{L}$ est de cardinal exactement q.
6. Démontrer que $\mathbf{L}$ est le seul sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q.

On désigne alors par $\mathbf{F}_q$ le corps $\mathbf{L}$, c'est-à-dire l'unique sous-corps de $\mathbf{K}$ de cardinal q.

7. Démontrer que $\phi_q(\mathbf{F}_{q^2}) \subset \mathbf{F}_{q^2}$ puis que $\mathbf{F}_q = \{x \in \mathbf{F}_{q^2},\ \phi_q(x) = x\}$.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Un groupe dont l'ordre est une puissance de p est appelé un *p-groupe*. Si G est un groupe, un sous-groupe de G dont l'ordre est une puissance de p est appelé un *p-sous-groupe* de G.

1. Soit α un entier $\geqslant 1$ et soit H un p-sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ d'ordre p^α.
   a) Démontrer que tout élément x de H vérifie $x^{p^\alpha} = I_n$.
   b) En déduire que $H \subset \mathcal{U}_n(\mathbf{F}_p)$.
2. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ contenu dans $\mathcal{U}_n(\mathbf{F}_p)$.
   a) Démontrer qu'il existe un entier $\alpha > 0$ tel que tout élément x de H vérifie $x^{p^\alpha} = I_n$.
   Indication : on pourra considérer α tel que $p^\alpha \geqslant n$.
   b) En déduire que H est un p-groupe.
   Indication : On pourra utiliser le théorème de Cachy rappelé en préambule du sujet.
3. Soit G un groupe fini. On désigne par r son ordre.
   a) Démontrer que G est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$.
   b) En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$.
4. Soit G un groupe fini. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) G est un p-groupe.
   (ii) Il existe r dans $\mathbf{N}\backslash\{0\}$ tel que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{F}_p)$ contenu dans $\mathcal{U}_r(\mathbf{F}_p)$.

Problème

Notations, vocabulaire et rappels

Soit G un groupe.

On définit le *centre* de G, noté $Z(G)$ par $Z(G) = \{g \in G,\ \forall x \in G, gx = xg\}$.

Pour tout (g,h) dans G^2, on définit le *commutateur* de g et h, noté $[g,h]$, en posant $[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

On définit alors le *sous-groupe dérivé* de G, noté $D(G)$, comme le sous-groupe de G engendré par tous ses commutateurs.

On admet que $Z(G)$ et $D(G)$ sont des sous-groupes distingués de G.

On note $\widehat{G}$ le groupe multiplicatif des morphismes de groupes de G dans $\mathbf{C}^*$.

On note $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G, c'est-à-dire des morphismes bijectifs de G dans lui-même. Le morphisme identité, noté Id_G, en est l'élément neutre.

Pour g un élément de G et H un sous-groupe de G, on note HgH l'ensemble $\{h_1 g h_2, (h_1,h_2) \in H^2\}$.

Soit G un groupe fini et soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que (π, V) est une *représentation* de G si $\pi : G \to \mathrm{GL}_{\mathbf{C}}(V)$ est un morphisme de groupe.

On rappelle qu'une représentation (π, V) de G est *irréductible* si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces de V stables par $\pi(g)$ pour tout g dans G sont $\{0\}$ et V.

Si H est un sous-groupe de G, on note V^H le sous-espace vectoriel des éléments de V fixés par H pour l'action de G sur V, c'est-à-dire :

$$V^H = \{x \in V,\ \forall h \in H, \pi(h)(x) = x\}.$$

On dit que deux représentations (π, V) et (π', V') de G sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme u de V dans V' tel que pour tout g dans G, $u \circ \pi(g) \circ u^{-1} = \pi'(g)$.

On note $\mathbf{C}[G]$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbf{C}$: il a pour dimension l'ordre de G et pour base canonique $(\delta_g)_{g\in G}$, où, pour g dans G, δ_g est la fonction qui à x dans G associe 1 si $x = g$ et 0 sinon.

Soit $\mathbf{F}$ un corps. Pour x, y et z dans $\mathbf{F}$, on pose $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{F})$, et :

$$\mathcal{H}_3(\mathbf{F}) = \{h(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbf{F}^3\}.$$

Partie I

On admet que, pour tout (x,y,z,x',y',z') dans $\mathbf{F}^6$, on a

$$h(x,y,z)h(x',y',z') = h(x+x', y+y', z+z'+xy').$$

1. Pour tout (x,y,z) dans $\mathbf{F}^3$, justifier que $h(x,y,z)$ est inversible et déterminer son inverse.

Tournez la page S.V.P.

On admet que $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbf{F})$.

2. Soit (x, y, z) dans $\mathbf{F}^3$.
   a) Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité :
   $$h(x,y,z)^n = h\left(nx, ny, nz + \frac{n(n-1)}{2}xy\right).$$
   b) Soit p un nombre premier impair. On suppose dans cette question que $\mathbf{F}$ est un corps de caractéristique p. Justifier que $h(x, y, z)$ est d'ordre 1 ou p.
   c) Dans le cas où $\mathbf{F}$ est un corps de caractéristique 2,
      i. Quels sont les ordres des éléments de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})$?
      ii. Dans le cas où $\mathbf{F}$ est de plus un corps fini de cardinal q, expliciter le nombre d'éléments d'ordre 2.
3. Justifier la relation $[h(x, y, z), h(x', y', z')] = h(0, 0, xy' - yx')$ pour (x, y, z, x', y', z') dans $\mathbf{F}^6$.
4. En déduire que $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) = D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F})) = \{h(0, 0, z),\ z \in \mathbf{F}\}$.

On note $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ le quotient $\mathcal{H}_3(\mathbf{F})/D(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$.

5. En considérant l'application
   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_3(\mathbf{F}) & \to & \mathbf{F}^2 \\ h(x,y,z) & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$
   démontrer qu'il existe un isomorphisme entre les groupes $Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))$ et $(\mathbf{F}^2, +)$.
6. Soient ψ_1 et ψ_2 dans $\widehat{(\mathbf{F}, +)}$. Soit $\psi_1 \otimes \psi_2$ l'application de $\mathbf{F}^2$ dans $\mathbf{C}^*$ définie par :
   $$\forall (x,y) \in \mathbf{F}^2,\ \psi_1 \otimes \psi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \psi_1(x)\psi_2(y).$$
   a) Justifier que $\psi_1 \otimes \psi_2$ est un morphisme de groupes.
   b) Soit j l'application définie par :
   $$j\ :\ \begin{array}{ccc} \widehat{(\mathbf{F},+)}^2 & \to & \widehat{(\mathbf{F}^2,+)} \\ (\psi_1,\psi_2) & \mapsto & \psi_1 \otimes \psi_2 \end{array}$$
   Démontrer que j est un isomorphisme entre les groupes $\widehat{(\mathbf{F}, +)}^2$ et $\widehat{(\mathbf{F}^2, +)}$.
7. Exhiber un isomorphisme de groupe entre $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F})}$ et $\widehat{Ab(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}))}$, et déterminer enfin un isomorphisme explicite entre $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F})}$ et $\widehat{(\mathbf{F}, +)}^2$.

Soit p un nombre premier et soit k un entier ≥ 1. On pose $q = p^k$. On reprend les notations de l'exercice 3.

8. Démontrer que $(\mathbf{F}_p, +)$ et $\widehat{(\mathbf{F}_p, +)}$ sont isomorphes.
9. Démontrer que $(\mathbf{F}_q, +)$ et $(\mathbf{F}_p^k, +)$ sont isomorphes.
10. En déduire l'ordre de $\widehat{\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)}$.

Partie II

Soient G un groupe fini et σ dans $\mathrm{Aut}(G)$. On suppose que σ est une involution, c'est à dire que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_G$. On note $\tau : G \to G$ l'application définie par $\tau(g) = \sigma(g)^{-1}$. On pose

$$G^+ = \{g \in G, \sigma(g) = g\} \quad \text{et} \quad G^- = \{g \in G, \sigma(g) = g^{-1}\}.$$

11. Démontrer que G^+ est un sous-groupe de G.

On suppose désormais que G est d'ordre impair. On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & G & \to & G \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

12. a) Soit x dans G. Démontrer qu'il existe y dans G tel que $x = y^2$.
    Indication : on pourra considérer $x^{|G|+1}$ où $|G|$ désigne l'ordre de G.

    b) Démontrer que Φ est une bijection de G dans lui-même.

13. Démontrer que l'application Φ induit deux bijections, de G^+ dans G^+ et de G^- dans G^- respectivement.

On introduit l'application $m : G^- \times G^+ \to G$ définie par

$$m(x^-, x^+) = x^- x^+.$$

14. Démontrer que l'application m est bijective.
15. Démontrer que pour tout g dans G, on a : $\tau(G^+ g G^+) = G^+ \tau(g) G^+ = G^+ g G^+$.

Partie III

Soit G un groupe fini d'élément neutre e. Pour f et f' dans $\mathbf{C}[G]$ et g dans G, on définit :

$$f * f'(g) = \sum_{x \in G} f(x) f'(x^{-1} g).$$

Ainsi $f * f' \in \mathbf{C}[G]$ et la quantité $f * f'$ est clairement linéaire en f et f'.

16. Démontrer que pour tout (a, b) dans G^2, on a : $\delta_a * \delta_b = \delta_{ab}$.
17. On admet que $(\mathbf{C}[G], *)$ est une $\mathbf{C}$-algèbre. Démontrer que δ_e en est l'unité.

Soit (π, V) une représentation de G. On définit une application $\widetilde{\pi}$ de $\mathbf{C}[G]$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ en posant pour tout f dans $\mathbf{C}[G]$:

$$\widetilde{\pi}(f) = \sum_{g \in G} f(g) \pi(g) \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V).$$

18. Démontrer que $\widetilde{\pi}$ est un morphisme d'algèbres.

Partie IV

Pour G un groupe fini, on considère σ, G^+ et τ comme dans la partie II. Pour f dans $\mathbf{C}[G]$, on note $\widetilde{\tau}(f)$ l'application $f \circ \tau$. On note $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}[G]$ défini par :

$$\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+] = \{f \in \mathbf{C}[G],\ \forall (x,y) \in (G^+)^2,\ \forall g \in G, f(xgy) = f(g)\}.$$

Une représentation (π, V) de G, est dite *distinguée* si $V^{G^+} \neq \{0\}$.

19. Démontrer que pour deux représentations isomorphes de G, (π', V') et (π, V), on a : $\dim(V'^{G^+}) = \dim(V^{G^+})$.

En particulier la propriété d'être distinguée ne dépend que de la classe d'isomorphisme d'une représentation.

20. Démontrer que pour tous $f,\ f'$ dans $\mathbf{C}[G]$, on a : $\tilde{\tau}(f * f') = \tilde{\tau}(f') * \tilde{\tau}(f)$.
21. Démontrer que $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ est stable par $*$.

On suppose désormais G d'ordre impair.

22. Démontrer que pour tout f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$, on a : $\tilde{\tau}(f) = f$.
23. En déduire que les éléments de $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ commutent pour la loi $*$, puis que $\widetilde{\pi}(\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+])$ est une famille commutative dans $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$.
24. Démontrer que, pour tout f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$, V^{G^+} est stable par $\widetilde{\pi}(f)$.

On note, dans toute la suite de cette partie, $F \subset \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V^{G^+})$ l'espace vectoriel des endomorphismes induits par les éléments de $\widetilde{\pi}(\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+])$ sur V^{G^+}.

25. Soit u dans F et soit λ dans $\mathbf{C}$ une valeur propre de u. Démontrer que le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_{V^{G^+}})$ est stable par tous les éléments de F.

On suppose désormais (π, V) irréductible et distinguée.

26. Démontrer que pour tout v dans $V \setminus \{0\}$, pour tout w dans V, il existe f dans $\mathbf{C}[G]$ telle que $\widetilde{\pi}(f)(v) = w$.
27. En déduire que pour tout v dans $V^{G^+} \setminus \{0\}$, pour tout w dans V^{G^+}, il existe f dans $\mathbf{C}[G^+\backslash G/G^+]$ telle que $\widetilde{\pi}(f)(v) = w$.
28. Démontrer que F ne contient que des homothéties puis que $\dim(V^{G^+}) = 1$.

On vient donc de démontrer que si G est d'ordre impair, et que (π, V) est une représentation irréductible distinguée de G, alors $\dim(V^{G^+}) = 1$.

Partie V

Soient p un nombre premier et k un entier ≥ 1. On pose $q = p^k$. On reprend les notations de l'exercice 3.

29. Quelles sont les représentations de dimension 1 de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ à isomorphisme près ? Combien y en a-t-il ?

Soit ψ dans $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}$. On suppose ψ n'est pas constant égal à 1. Pour f dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ et $h(x_0, y_0, z_0)$ dans $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$, on définit $\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))f$ dans $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ par :

$$\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))f : x \mapsto \psi(z_0 + xy_0)f(x + x_0).$$

On admet que l'application

$$\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0)) : f \mapsto \rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))f$$

est un endomorphisme de $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$; ainsi, ρ_ψ définit une application de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$.

30. Démontrer que $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ est une représentation de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$.
31. Démontrer que, pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $\frac{1}{q}\sum_{y\in\mathbf{F}_q}\psi(xy) = \delta_0(x)$.
32. Démontrer que tout sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de $\mathbf{C}[\mathbf{F}_q]$ et stable par $\rho_\psi(h(x_0, y_0, z_0))$, pour tout (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbf{F}_q^3$, contient δ_0.
33. En déduire que $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ est une représentation irréductible.
34. Démontrer que, pour tous ψ et ψ', deux éléments distincts et non constants à 1 de $\widehat{(\mathbf{F}_q, +)}$, les représentations $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ et $(\rho_{\psi'}, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$ ne sont pas isomorphes (on pourra s'intéresser à l'action de $Z(\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q))$ sur les représentations en question).
35. Quelle est la dimension de $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_q])$?
36. En déduire toutes les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$.

Partie VI

On reprend les notations de l'exercice 3. On note s la restriction de ϕ_q à $\mathbf{F}_{q^2}$. On pose $G = \mathcal{H}_3(\mathbf{F}_{q^2})$ et on définit l'application $\sigma : G \to G$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{F}_{q^2},\ \sigma(h(x, y, z)) = h(s(x), s(y), s(z)).$$

37. Démontrer que σ est un élément d'ordre 2 de $\mathrm{Aut}(G)$.
38. Justifier que le sous-groupe G^+, défini en partie II, est égal à $\mathcal{H}_3(\mathbf{F}_q)$.
39. Déterminer les représentations de dimension 1 distinguées de G à isomorphisme près. Combien y en a-t-il ?

Soit ψ un élément de $\widehat{(\mathbf{F}_{q^2}, +)}$, dont on suppose qu'il n'est pas constant égal à 1. On dispose d'après la partie V d'une représentation $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ associée à ψ.

40. Démontrer que la représentation $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ est distinguée si et seulement si, pour tout x dans $\mathbf{F}_q$, $\psi(x) = 1$.

On suppose désormais que la représentation $(\rho_\psi, \mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}])$ est distinguée.

41. Démontrer que pour tout x dans $\mathbf{F}_{q^2} \setminus \mathbf{F}_q$, il existe (z_0, y_0) dans $\mathbf{F}_q^2$ tel que $\psi(z_0 + xy_0) \neq 1$.
42. En déduire que pour cette représentation, on a : $\dim(\mathbf{C}[\mathbf{F}_{q^2}]^{G^+}) = 1$, même si $p = 2$.
43. Expliciter une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles de G^+ et celles des représentations irréductibles distinguées de G.