PARTIEL MATHEMATIQUES APPLIQUEES

EPF, 2eme ANNEE, 2004

RATTRAPAGE

(calculatrice EPF autorisée)

1.(*6 points*)

a) Montrer que l'équation $x^3 = -3x+2$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que $\alpha \in [0,1]$.

b) En utilisant la méthode de Newton, donner (en le justifiant) une approximation sous forme décimale de α avec une précision de 10^{-5}.

2.(*7 points*)

Soit $f \in C^2([0,1],\mathbf{R})$ telle que $(f(0), f(1), f(2)) = (0,1,3)$ et $(f'(0), f'(1), f'(2)) = (0,1,0)$.

a) En considérant l'application $\phi : \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_5 \to \mathbf{R}^6 \\ P \mapsto (P(0), P'(0), P(1), P'(1), P(2), P'(2)) \end{pmatrix}$ montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \boldsymbol{P}_5$(polynômes de degré au plus 5) qui vérifie les mêmes hypothèses que f. Proposer une méthode de calcul de P.

b) Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in C^1([0,2],\mathbf{R})$, cubique par morceaux (savoir dans $\boldsymbol{P}_3$ sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$) qui vérifie les mêmes hypothèses que f.

c) Calculer $s(\frac{1}{2})$ et $P_l(\frac{1}{2})$ où P_l désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $(0,1,2)$.

3.(*7 points*)

On considère l'équation différentielle suivante:

$$xy'(x) + y(x) + \tan(x) = 0$$

a) En utilisant le théorème de Cauchy Lipschitz, montrer qu'il existe une unique solution Y de (E) définie sur un intervalle ouvert I contenant 1 et telle que $Y(1) = 0$

b) Calculer explicitement Y et déterminer sur quel intervalle maximal elle peut être définie.

c) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et expliciter cette solution.