Un texte, une modélisation

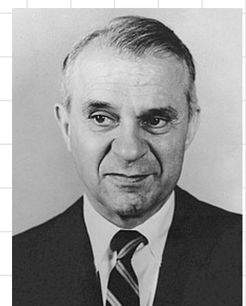
Laurent Dumas

Texte 5 : l'économie circulaire

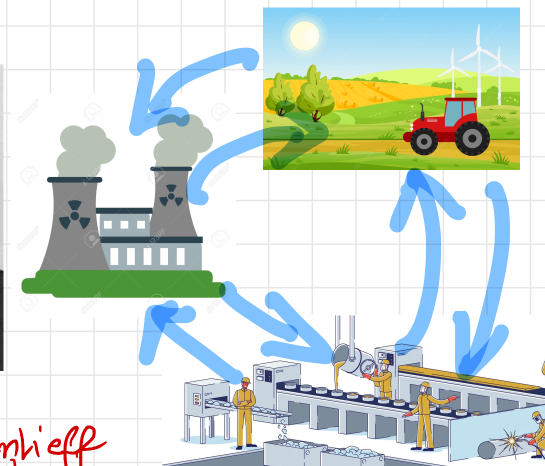
* **Objectif** : modéliser une économie circulaire et déterminer sa rentabilité.

* **Exemple étudié** : modélisation de l'économie en 3 secteurs d'activité : agriculture, biens manufacturés et énergie.

* **Outils mathématiques** :
  Algèbre linéaire (résolution de systèmes, recherche de valeurs propres)



Wassily Léontieff
Prix Nobel
1973



Etape 1 : modélisation d'une économie circulaire

* On dispose de :
  → n secteurs d'économie
* Chaque secteur j utilise, pour sa production d'une unité de produit, une fraction a_{ij} du produit i ($0 \le a_{ij}$)
* On construit :
  → $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de production

$$A = \begin{array}{cc} & \quad j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \quad (n \times n)$$

fraction du secteur i utilisée par le secteur j

On connait :
→ la consommation du public : $c \in \mathbb{R}^n$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

quantité de produit du secteur i consommée par le public

On cherche :
→ la production de chaque secteur

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ pour répondre à la demande.

Etape 2 : recherche de la production de chaque secteur

Pour que l'économie circulaire soit équilibrée, il faut trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, à coordonnées toutes positives tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

fraction du secteur i utilisée par le secteur j

soit $Ax + c = x$ ou encore

$$Mx = c \quad \text{avec} \quad M = I - A$$

On a le résultat d'existence suivant d'une telle solution x :

Théorème : le modèle précédent admet une unique solution $x \in \mathbb{R}_+^n$, pour tout vecteur $c \in \mathbb{R}_+^n$, si et seulement si il existe un vecteur de prix $p \in \mathbb{R}^n$ tel que ${}^tMp \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

On dit alors que M est productive.

Etape 3 : critères de productivité et rentabilité de l'économie

On peut traduire la productivité de la matrice $M = I - A$ à partir de ses coefficients :

→ Critère 1 : si

$$\mathrm{Min}\left(\underset{i}{\mathrm{Max}}\sum_j a_{ij}, \underset{j}{\mathrm{Max}}\sum_i a_{ij}\right) < 1$$

alors la matrice $M = I - A$ est productive.

→ Critère 2 : une matrice $M = I - A$ est productive si et seulement si $\rho(A) < 1$ (rayon spectral)

Si on rajoute dans le modèle un coût de production de chaque secteur $\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_n \end{pmatrix}$, et qu'on suppose :

$$p >^r Ap + \Pi \; (= v),$$

on cherche à maximiser le taux de rentabilité σ supposé constant, de chaque secteur.

On doit alors trouver $p \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que :

$\sigma v = p - v$, soit

$$\left(\frac{1}{1+\sigma} I - A\right) p = \Pi$$

Ceci n'est possible que si $\rho(A) < \frac{1}{1+\sigma}$

Etape 4 : simulation avec le logiciel Scilab

* Exemple d'économie circulaire : l'économie d'Israël en 1958 (ref : Léontieff).

→ 3 secteurs :

1) Agriculture
2) Biens manufacturés
3) Energie

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}293 & 0 & 0 \\ 0{,}014 & 0{,}207 & 0{,}017 \\ 0{,}044 & 0{,}01 & 0{,}216 \end{pmatrix}$$

→ Demande des consommateurs :

$$c = \begin{pmatrix} 13{,}2 \\ 17{,}6 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$$ (en millions de devise locale)

Pour aller plus loin :

→ aspects numériques : effets des erreurs d'arrondis de A.

→ aspects théoriques : preuves des résultats théoriques énoncés.

Référence :

www.agreg.org

(texte de modélisation)