- les candidats ont, pour la plupart, préparé avec sérieux cette épreuve très particulière de l'Oral
- certains candidats ont utilisé efficacement l'ordinateur et les logiciels mis à disposition; les candidats qui refusent l'usage de l'outil informatique
- la moyenne des notes est environ 8/20 et l'écart-type environ 3,5. Pour les sept candidats qui ont choisi la leçon, la moyenne est 26,5/80.
- les notes vraiment faibles résultent d'une compréhension insuffisante du sujet, de connaissances mathématiques mail assurées, de résultats erronés ou illogiques, de l'absence d'illustration informatique voire du refus d'utiliser l'ordinateur.

7.1 Texte 1 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.1.1 Introduction, l'image numérique

L'intérêt des images numériques à coté des images analogiques est une évidence depuis la fin du vingtième siècle. Elles permettent un travail efficace et simple aussi bien pour le stockage (compression), que pour le traitement ou l'analyse (par des moyens informatiques).

Une image numérique est obtenue en captant la lumière provenant d'une scène ou d'un document par des capteurs électroniques, les CCD (charge couple device). Ces capteurs convertissent le signal lumineux en données numériques. Ces données sont organisées en tableaux à double entrée (horizontal, vertical), i.e. en matrices. Chaque terme de la matrice donne l'information lumineuse provenant d'une zone physique de la scène, du document. Le terme $m_{i,j}$ correspond à la zone rectangulaire $[a, b] \times [c, d]$, est subdivisée en petits rectangles

$$\left[a + \frac{(i-1/2)(b-a)}{n}, a + \frac{(i+1/2)(b-a)}{n}\right] \times \left[c + \frac{(j-1/2)(d-c)}{p}, c + \frac{(j+1/2)(d-c)}{p}\right].$$

On parle de pixel (picture element).

Les images numériques présentent un aspect discret, à l'opposé de la scène (ou document) d'origine qui est de caractère continu. L'aspect discret provient d'abord d'une discrétisation spatiale, remplacement d'une zone rectangulaire par un couple d'entiers (i, j). Il provient aussi de la quantification des intensités lumineuses, les termes de la matrice sont choisis dans un intervalle entier, $[[0, 255]]$ par exemple, s'il y a une seule couleur ou bien des niveaux de gris. Il faut trois matrices pour rendre compte des couleurs réelles, en utilisant le système trichromatique RGB par exemple (RGB= red, green, blue).

7.1.2 Analyse élémentaire de l'image numérique

On considère ici une image numérique en niveaux de gris, donnée par une matrice M carrée d'ordre 512 dont les termes sont éléments de [[0,255]]. Un des premiers indicateurs utiles sur l'image est la répartition des niveaux de gris, c'est à dire un vecteur ligne $R = (n_0, \cdots, n_{255})$ où n_k est le nombre de pixels d'intensité

k (i.e. de termes de M valant k). En regroupant les niveaux en classes adjacentes (par exemple 32 segments de longueur 8) on simplifie le travail ultérieur (la répartition devient un vecteur ligne de taille 16), sans perte importante d'information. On représente graphiquement cette répartition, on dispose ainsi d'un histogramme de l'image.
Cette répartiton donne une idée du contraste de l'intensité dans l'image. Des transformations simples permettent d'améliorer le contraste, par exemple de rendre plus uniforme la répartition, d'étaler son support.

La recherche des (i, j) où l'intensité varie brusquement permet d'identifier les contours des objets présents dans la scène ou le document. Les plages d'indice où l'intensité varie peu, ou bien varie régulièrement - avec des répétitions - identifie des objets ou des parties d'objet présentant une texture particulière. On parle d'analyse de contours et d'analyse de textures.

7.1.3 Compression d'image numérique par SVD

On note $I(M)$ la quantité d'information portée par une image M. Dans le cas d'une image en niveaux de gris, avec M carrée d'ordre 512 dont les termes appartiennent à [[0,255]], $I(M)$ est de l'ordre de $512^2 \times 8$ (les termes $m_{i,j}$ sont écrits en base 2), approximativement $\boxed{2{,}36\ 10^6}$. Comprimer une image M consiste à la remplacer par une autre image M' proche de M - l'idéal étant qu'un oeil humain confonde pratiquement ces deux images - mais de poids bien inférieur, $I(M') << I(M)$.
Une technique classiquement utilisée repose sur la notion de valeurs singulières des matrices. Le théorème (Beltrami, Jordan, Sylvester ... puis Eckart-Young) s'énonce : pour toute matrice réelle A de taille n, p, il existe des matrices orthogonales U, V_t et une matrice D de taille n, p telles que

$$i \neq j \Rightarrow d_{i,j} = 0 \text{ et } d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots \geq d_{q,q} \geq 0 \tag{7.1.1}$$

où $q = \min(n, p)$. L'extension aux matrices complexes est valide, avec U, V unitaires et D respectant (7.1.1). Les $d_{i,i}$ sont analogues à des niveaux d'énergie, corresondant aux vecteurs d'une nouvelle base, ils sont positifs et ordonnés en décroissant. Ils peuvent contenir des répétitions et si les k derniers sont 0 cela signifie que le rang de A est $q - k$.

En pratique il est courant de trouver un nombre relativement important de$d_{i,i}$ nuls ou proches de 0. On peut fixe un seuil, par exemple $s = d_{1,1}/100$, on considère alors que la matrice $M' = UD'V_t$ où D' est obtenue en remplaçant dans D les $d_{i,i}$ infériurs au seuil par 0 donne une image proche de M. Il est clair que $I(M')$ est inférieur à $I(M$, voire très inférieur. Par exemple si M est d'ordre 512 et si la moitié des $d_{i,i}$ est négligée on obtient

$$M' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta & 0 \\ U_3\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1\Delta V_1 & U_1\Delta V_2 \\ U_3\Delta V_1 & U_3\Delta V_2 \end{pmatrix}$$

ce qui limite la quantité d'information à $4 \times 256^2 + 256 =$ environ $\boxed{2{,}62\ 10^5}$, soit un gain de facteur 10 environ.

7.1.4 Extrait d'un sujet de concours CPGE sur la SVD

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et p colonnes. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ respectivement à $\mathbb{R}^n$ et

$\mathbb{R}^p$ que l'on supposera munis de leurs produits scalaires canoniques notés respectivement $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_n$ et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$. Les normes associées seront notées respectivement $\| \cdot \|_n$ et $\| \cdot \|_p$.
On notera $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $(F_j)_{1 \leq j \leq n}$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité. On écrit $0_{n,p}$ pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et 0_n pour la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour A appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathrm{t}}A$ désigne la matrice transposée de A : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. $\operatorname{Ker} A$ désigne est le noyau de A, $\operatorname{Im} A$ l'image de A. Le noyau de A est $\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0 \}$, noté $\operatorname{Ker} A$, l'image de A est $\{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \}$, notée $\operatorname{Im} A$. On note $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien.

Partie I

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
I.1. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est nulle si et seulement si A est nulle.
Dans toute la suite du problème A sera supposée non nulle.
I.2. Montrer que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ sont diagonalisables au moyen de matrices orthogonales.
I.1.a) X, Y désignant deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le produit scalaire $\langle X \mid Y \rangle_n$ sous la forme d'un produit matriciel.
b) Si W est un vecteur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$ associé à la valeur propre λ, exprimer $\| AW \|_n^2$ en fonction de λ et $\| W \|_p$.
c) En déduire que les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont réelles, positives ou nulles.
I.4.a) Pour x réel, calculer les produits matriciels par bloc suivants:

$$\begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^{\mathrm{t}}A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_n & A \\ 0_{p,n} & -xI_p \end{pmatrix}$$

b) En déduire que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité.
c) En déduire également que les matrices ${}^{\mathrm{t}}AA$ et $A{}^{\mathrm{t}}A$ ont même rang.
I.5. Montrer que si $n > p$, 0 est valeur propre de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et que si $n < p$, 0 est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}AA$.
I.6. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$, chaque valeur propre apparaissant dans cette liste un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et on pose $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout i élément de $\{1, 2, \ldots, p\}$. *Les réels μ_i sont appelés valeurs singulières de A.*
On suppose les réels λ_i ordonnés tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$.
a) Montrer que λ_1 est non nul.
On définit alors un unique entier naturel r appartenant à $\{1, 2, \ldots, p\}$ comme suit : si toutes les valeurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ sont non nulles, $r = p$, sinon r est tel que pour tout $i \leq r$, $\lambda_i > 0$ et pour tout $i > r$, $\lambda_i = 0$.
Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres de ${}^{\mathrm{t}}AA$ respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; $V_1, V_2, \ldots, V_r$ désignent les vecteurs propres associés aux valeurs propres non nulles et lorsque r est strictement inférieur à p, $V_{r+1}, \ldots, V_p$ désignent les vecteurs propres associés à la valeur propre 0.
b) Montrer que $r \leq n$ et que la dimension de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$ est égale à $n - r$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $U_i = \dfrac{1}{\mu_i} AV_i$ et si $n > r$, on désigne par $(U_{r+1}, \ldots, U_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A$.
c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $AV_i = \mu_i U_i$ et que si r est strictement inférieur à p, pour tout $i \in \{ r+1, \ldots, p \}$, $AV_i = 0$.
d) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = \mu_i V_i$.

e) Montrer que si $n > r$, pour tout $i \in \{ r+1, \dots, n \}$, ${}^{\mathrm{t}}AU_i = 0$.

f) En déduire que le système de vecteurs $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ constitue une base orthonormale de vecteurs propres de $A{}^{\mathrm{t}}A$ et préciser la valeur propre associée à chaque vecteur U_i.

I.7. On note V la matrice carrée réelle d'ordre p dont le $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur V_i, U la matrice carrée réelle d'ordre n dont le $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ vecteur colonne est le vecteur U_j et $({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j}$ l'élément de la $\mathrm{i}^{\text{ème}}$ ligne, $\mathrm{j}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice ${}^{\mathrm{t}}UAV$.

a) Montrer que :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,n\} \times \{1,2,\dots,p\},\ ({}^{\mathrm{t}}UAV)_{i,j} = \mu_j \delta_{i,j} \ \text{ où }\ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

b) On note Δ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les éléments $\Delta_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta_{11}, \Delta_{22}, \dots, \Delta_{rr}$ respectivement égaux à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$. Montrer que $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$.

La factorisation de A ainsi obtenue est dite décomposition de A en valeurs singulières.

c) Trouver une décomposition en valeurs singulières de chacune des matrices :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I.8. Montrer que le rang de A est égal à r.

I.9.a) Montrer que $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} V_i{}^{\mathrm{t}}E_i$.

b) En déduire : $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i U_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad {}^{\mathrm{t}}AA = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i V_i{}^{\mathrm{t}}V_i \quad , \quad A{}^{\mathrm{t}}A = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i{}^{\mathrm{t}}U_i$

c) Déterminer les sous-espaces vectoriels suivants : $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}A$.

d) Montrer que $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}AA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} A{}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}A$.

Partie II

Avec les notations de la partie **I**, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admettant une décomposition en valeurs singulières $A = U\Delta{}^{\mathrm{t}}V$, on appelle Δ^+ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont tpus les éléments $\Delta^+_{i,j}$ sont nuls sauf $\Delta^+_{11}, \Delta^+_{22}, \dots, \Delta^+_{rr}$ respectivement égaux à $\dfrac{1}{\mu_1}, \dfrac{1}{\mu_2}, \dots, \dfrac{1}{\mu_r}$ et on pose $A^+ = V(\Delta^+){}^{\mathrm{t}}U$.

Δ^+ (resp. A^+) est appelée pseudo-inverse de Δ (resp. de A). A priori, la matrice A^+ ainsi définie dépend de la décomposition en valeurs singulières choisie pour la matrice A, mais il sera montré à la question **II.9** *qu'il n'en est rien et que A^+ est uniquement déterminée à partir de A.*

1. Déterminer les matrices A_0^+, $A_0A_0^+$, $A_0^+A_0$, $A_0A_0^+A_0$ et $A_0^+A_0A_0^+$.

2. Déterminer $(A_0^+)^+$.

3. Évaluer $\Delta^+\Delta$ et $\Delta\Delta^+$.

4. Montrer que si A est une matrice carrée inversible ($n = p = r$), alors $A^+ = A^{-1}$.

7.1.5 Indications pour le traitement d'images avec des logiciels mathématiques

La plupart des logiciels mathématiques (Maple, Matlab, Scilab, Python ...) permettent de travailler sur des images. Donnons ci dessous quelques indications pour Scilab :

En Scilab utiliser le module SIVP (menu Modules) qui permet de tavailler sur les images numériques. On suppose disposer sur le répertoire courant de Scilab d'une image nomdimage.jpg. L'instruction M=imread('nomdim fournit une matrice à termes entiers de 0 à 255.

En fait ce sont des entiers modulo 256 et il est pratique de les transformer en entiers ordinaires par la commande M1=double(M) // double signifie ici entiers longs

On peut utiliser les commandes usuelles de Scilab et opérer sur $M1$. Pour visualiser la matrice $M2$ finalement obtenue on peut utiliser les commandes du module SIVP ou, plus simplement, les tracés ordinaires par plot et ses variantes. On conseille la séquence d'instructions suivante:

z=scf(); // une 'fonction' z est ainsi définie qui permet de jouer sur le graphique courant
grayplot(1:m,n:-1:1,MM) // NB c'est une image en couleurs qui est affichée dans la fenêtre Figure
z.color_map=graycolormap(32); // transforme les couleurs en niveaux de gris.
On l'exporte en fichier .jpg par menu de la fenêtre Figure.

7.1.6 Suggestions de développement

Ce paragraphe ne contient qu'un petit nombre de suggestions. Vous pouvez choisir d'étudier certains points seulement, de façon plus ou moins approfondie, et pas nécessairement dans l'ordre. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées ci dessous. Il est vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques.

Aspect mathématique

- Donner une preuve de l'unicité de A^+, matrice définie au début de la partie 2 du sujet CPGE, matrice qu'on appelle pseudo-inverse de A. Donner quelques propriétés de la pseudo-inverse.

- Donner des exemples de calcul de décomposition en valeurs singulières en petite dimension.

- En suivant le sujet de concours ou en le modifiant, donner une preuve de la décomposition en valeurs singulières pour une matrice rectangulaire.

- Que donne la SVD de A si A est une matrice symétrique, antisymétrique, orthogonale, idempotente, ... ?

Aspect modélisation, calcul numérique et algorithmique

- Quel est l'intérêt de modèles numériques pour les images?

- Travailler sur une image présente sur l'ordinateur, déterminer l'histogramme ou d'autres caractéristiques de l'image.

- Proposer un programme informatique permettant de calculer et afficher les contours présents dans une image. Appliquer sur un exemple.

- Appliquer la méthode SVD pour transformer une image I en une image I' pratiquement similaire à I mais de poids bien inférieur (en termes de longueur de fichier). Essayer plusieurs seuils et discuter au vu des images obtenues.

- Modifier une image en lui ajoutant (informatiquement) du bruit. Pour cela on ajoute à la matrice de l'image une matrice dont les termes sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, loi centrée (qui admet une espérance 0). Proposer une méthode, un algorithme, un programme permettant d'éliminer une grande partie du bruit (restauration d'images).
- Proposer un algorithme, un programme donnant la SVD d'une matrice entrée par l'utilisateur (ou chargée à partir d'un fichier).

7.2 Texte 2 de l'épreuve de modélisation

Le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes libres d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Ce ne sont que des suggestions et vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.

7.2.1 Le problème de Dirichlet

On considère un solide homogène, conduteur de chaleur et tel qu'en tout point de la surface extérieure la température ne varie pas. Il est clair que le champ des températures à l'intérieur du solide va évoluer avec le temps jusqu'à atteindre un équilibre thermique.
Les hypothèses raisonnables du modèle sont
- la fonction qui à tout point de la surface du solide associe sa température est continue (et constante par rapport au temps comme indiqué plus haut).
- à tout instant fixé, en tout point M intérieur au solide la température en M est la moyenne des températures prises sur une petite boule centrée en M (propagation de la chaleur dans un solide homogène qui ne contient aucune source de chaleur interne)

On s'intéresse donc au problème suivant, dit de Dirichlet avec condition au bord :
Soit G un ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, ∂G sa frontière et soit φ une fonction continue de ∂G dans $\mathbb{R}$. Chercher une fonction continue f de $\overline{G}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
(a) $\forall x \in G, \quad \forall r \in]0, dist(x, \partial G)[, \quad f(x) = \int_{|y|\leq r} f(x+y)dy$
(b) $\forall x \in \partial G, \quad f(x) = \varphi(x)$

Une solution de ce problème est nécessairement régilière et vérifie une EDP où intervient le laplacien de f, $\Delta f = \sum_{k=1}^{d} \partial^2_{k,k} f$, on peut énoncer :

Theorem 7.2.1 *Une fonction f est solution du problème de Dirichlet sur G avec condition au bord h si et seulement si elle est de classe C^2 sur G, continue sur $\overline{G}$, vérifie la condition au bord (b) et l'EDP (c) $\Delta f(x) = 0$, pour tout $x \in G$.*

On connait des théorèmes qui assurent, modulo des conditions sur le domaine G et sa frontière, l'existence ou l'unicité de f, solution du problème de Dirichlet $\left\{ \begin{array}{l} (c) \\ (b) \end{array} \right.$. Mais il n'y a pas de formule explicite pour exprimer la solution en général et on est amené à développer des méthodes numériques d'approximation des solutions. Un cas particulier où existe une solution sous forme intégrale est celui des boules (euclidiennes), on dispose alors du résultat suivant