

Optimisation globale et applications en médecine

Laurent Dumas

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC

2 octobre 2006

- 1 Exemples de problèmes d'optimisation en médecine
- 2 Méthodes d'optimisation globale
- 3 Principaux résultats
- 4 Conclusion, perspectives

1 Exemples de problèmes d'optimisation en médecine

- Exemple 1 : pose d'un stent
- Exemple 2 : identification de paramètres d'un modèle 1D

2 Méthodes d'optimisation globale

3 Principaux résultats

4 Conclusion, perspectives

Exemple 1 : pose d'un stent après une sténose

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation

déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats

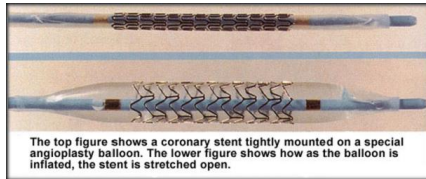
fonctions test

exemple 1

exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Une endoprothèse, appelée aussi stent, est placée dans une artère partiellement bouchée (ou sténosée) afin de lui redonner son diamètre initial.



- Il s'avère malheureusement qu'un phénomène de resténose a pu être observé chez certains patients quelques mois après l'opération.
- On cherche ici à étudier l'influence du stent sur l'écoulement sanguin et à limiter celle-ci en optimisant la forme du stent.

Exemple 1 : causes possibles de resténose

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

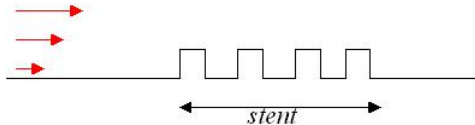
Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Il existe deux causes connues pouvant favoriser une resténose : la présence de tourbillons dans l'écoulement ainsi que de faibles valeurs de contraintes de cisaillement en paroi.



- On est ramené dans ce cas à un **problème d'optimisation globale multi-critères** de la forme du stent.

Exemple 2 : identification de paramètres d'un modèle 1D

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation

déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- L'objectif consiste ici à calibrer les paramètres d'un modèle 1D d'écoulement sanguin, à partir de données accessibles de manière non intrusive pour un patient (flux ou sections de l'artère à différents instants).
- Les applications médicales visées sont nombreuses. On peut citer par exemple la possibilité d'accéder alors par une simulation en temps réel, aux caractéristiques complètes de l'écoulement pour un patient quelconque.
- On est ramené dans ce cas à un **problème inverse d'optimisation globale** d'une fonction de type moindres carrés.

1 Exemples de problèmes d'optimisation en médecine

2 Méthodes d'optimisation globale

- Méthodes déterministes
- Méthodes stochastiques
- Méthodes hybrides

3 Principaux résultats

4 Conclusion, perspectives

Méthodes déterministes

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Le problème général d'optimisation à résoudre est le suivant :

$$\text{trouver } x^* = \operatorname{argmin}\{J(x) \equiv J(x, W(x)), x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$$

où $W(x)$ représente des variables auxiliaires, par exemple celles d'un écoulement fluide associé au paramètre x satisfaisant une EDP de la forme $E(x, W(x)) = 0$.

- La principale difficulté d'une méthode d'optimisation de type gradient consiste dans ce cas à calculer numériquement $\nabla J(x)$.
- En outre, de telles méthodes ne permettent de déterminer qu'un minimum local de J .

Méthodes stochastiques

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation

déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Afin de remédier au problème de la convergence locale, il est possible de rechercher le minimum global de la fonctionnelle J en utilisant une méthode stochastique de type **algorithmes génétiques**.
- Cette méthode est à présent largement utilisée dans l'industrie pour des problèmes d'optimisation complexe. Elle possède en effet les avantages supplémentaires, d'être robuste, facilement parallélisable et de posséder une version multi-objectif.
- La principale limitation de ce type de méthode vient de son **coût de calcul très élevé** en raison du grand nombre d'évaluations de J qu'elle nécessite.

Principe général des algorithmes génétiques

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

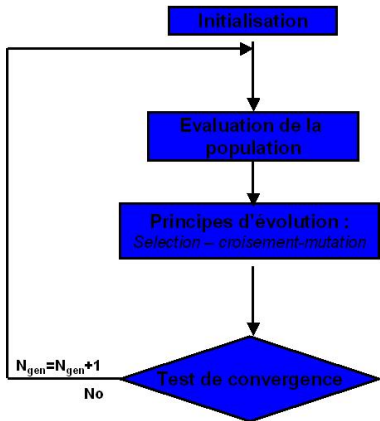
Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

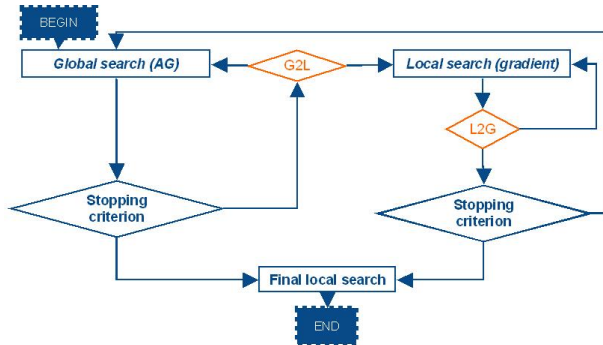
Conclusion,
perspectives



- Initialisation : sélection aléatoire de N_p 'individus' correspondant à différentes valeurs de $x \in \mathbb{R}^n$.
- Evaluation : à chaque individu $x \in \mathbb{R}^n$ est affecté une 'santé' proportionnelle à $J(x)$.
- La population évolue à chaque génération à travers trois principes 'Darwiniens' de sélection, croisement et mutation.

Méthodes hybrides : principe de couplage

- De nouvelles méthodes d'optimisation ont dû être développées afin d'accélérer la convergence des algorithmes génétiques.
- La première idée a consisté à coupler de manière efficace et adaptative les méthodes stochastiques de recherche globale avec les méthodes déterministes de recherche locale.



Méthodes hybrides : principe d'évaluations rapides

- La seconde idée a consisté à effectuer au cours du processus d'optimisation, un certain nombre d'évaluations approchées de la fonction coût du type :

$$\tilde{J}(x) = \sum_{i=1}^{n_c} \psi_i \Phi(\|x - T_i\|)$$

pour une certaine fonction Φ et pour un ensemble de points $\{T_i, 1 \leq i \leq n_c\}$ où une évaluation exacte de J est connue.

- Les coefficients $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n_c}$ sont obtenus en résolvant un problème de moindres carrés du type

$$\text{minimiser } err(\Psi) = \sum_{i=1}^N (J(T_i) - \tilde{J}(T_i))^2 + \lambda \sum_{i=1}^{n_c} \psi_i^2$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre de régularisation.

1 Exemples de problèmes d'optimisation en médecine

2 Méthodes d'optimisation globale

3 Principaux résultats

- Fonctions test
- Exemple 1
- Exemple 2

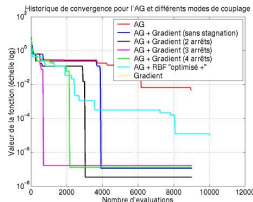
4 Conclusion, perspectives

Exemple de fonction test : la fonction de Rastrigin

- Les méthodes d'optimisation hybrides ont été testées sur différentes fonctions test particulièrement exigeantes, par exemple la fonction de Rastrigin :

$$J(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \cos(18x_i)) + n$$

- Sur cet exemple, on peut constater le gain de convergence avec l'utilisation d'une méthode hybride. En moyenne, celui-ci se situe entre un facteur 2 et un facteur 10.



Exemple 1 : paramétrage du stent

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation

déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats

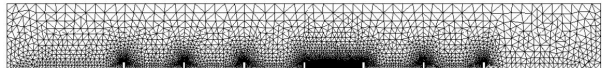
fonctions test

exemple 1

exemple 2

Conclusion,
perspectives

- La résolution de ce problème, en collaboration avec A. Blouza et I. MBaye, s'est effectué dans un cadre bidimensionnel où le stent est paramétré par trois longueurs caractéristiques, épaisseur, hauteur et espacement des spires.



- Les équations de Stokes sont résolues sur le domaine fluide. A noter que la flexibilité du stent a également été prise en compte, lors d'un second calcul, par l'intermédiaire d'un modèle fluide/structure (de type poutre) écrit avec FreeFem.

Exemple 1 : fonctions objectif

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Deux fonctions coût ont été définies, la première à maximiser, est reliée à la contrainte de cisaillement en paroi :

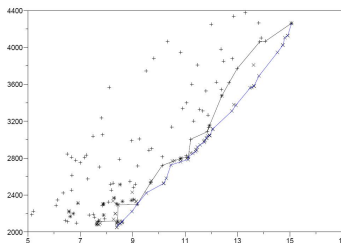
$$J_1 = \frac{1}{2 \times H + L} \int_{\Gamma_\omega} |\mu(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2})|^2 d\Gamma_\omega$$

la seconde à minimiser, est reliée au rotationnel moyen de l'écoulement :

$$J_2 = \frac{1}{L \times H} \int_\omega |\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}|^2 d\Omega$$

Exemple 1 : principaux résultats

- Les résultats obtenus, donnés sous la forme d'un front de Pareto, montrent le gain significatif résultant de l'optimisation de formes, ainsi que le caractère fortement antagoniste des deux causes possibles de resténose.



- Les formes optimales obtenues font apparaître le caractère prépondérant joué par la hauteur des spires parmi les caractéristiques du stent.

Exemple 2 : description du modèle 1D

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Le modèle 1D étudié a pour inconnues la section $A(t, z)$ de l'artère et le flux sanguin $Q(t, z)$ suivant le système :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha Q^2}{A} \right) + \frac{A}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + K_r \frac{Q}{A} = 0$$

où la pression obéit à la loi suivante :

$$P(t, z) - P_{\text{ext}} = \beta(A^{\frac{1}{2}} - A_0^{\frac{1}{2}})$$

- La valeur à identifier à partir de relevés de flux et de section est celle de β , directement liée à la flexibilité de l'artère. Celle-ci peut être choisie constante ou variable en espace.

Exemple 2 : principaux résultats

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- Les premiers résultats d'optimisation du paramètre β obtenus par JF Gerbeau et ses coauteurs à l'aide d'une méthode déterministe et d'un calcul du gradient par l'état adjoint, ont été confirmés en utilisant une méthode stochastique classique.
- Ces premiers résultats sont intéressants au sens où ils font apparaître une valeur de β non intuitive.
- Un second calcul d'identification de paramètres pour des valeurs de β non constantes le long de l'artère, a été entrepris avec les méthodes hybrides précédentes. Les premiers résultats permettent de retrouver la forme de β cible. Des améliorations restent cependant à effectuer sur le calcul du gradient de la fonctionnelle.

Conclusion

optimisation
globale et
médecine

L. Dumas,
séminaire REO

Exemples en
médecine

Exemple 1

Exemple 2

Méthodes
d'optimisation
déterministes
stochastiques
hybrides

Résultats
fonctions test
exemple 1
exemple 2

Conclusion,
perspectives

- De nouvelles méthodes d'optimisation globale ont été développées afin de répondre à des exigences de réduction de coût de calcul.
- Elles trouvent de nombreuses applications en médecine, soit pour des problèmes directs d'optimisation de formes, soit pour des problèmes inverses d'identification de paramètres.
- Un nouvel axe d'investigation, important du point de vue des applications, concerne la capacité de la méthode à déterminer une solution optimale robuste (collaboration L. El Alaoui, post doc REO).