

Un texte , une modélisation

Laurent Dumas

Texte 6 : production de biogaz

* Objectif : modéliser et calculer la production de biogaz (méthane) dans un dispositif de recyclage.

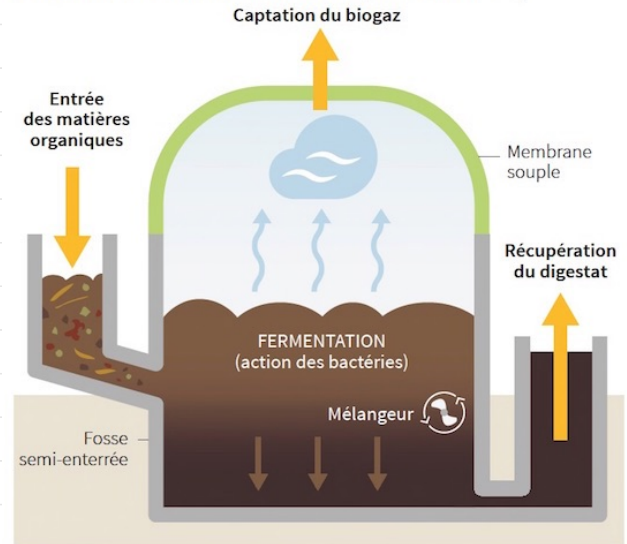
* Exemple étudié : méthaniseur

produisant un biogaz à partir de la fermentation d'un micro-organisme

* Outils mathématiques :

calcul d'intégrales et résolution d'équations différentielles.

LE FONCTIONNEMENT D'UN MÉTHANISEUR (en anaérobie à 38 °C)



Etape 1 : modélisation de la production de biogaz

On note $q(t)$ la quantité de micro-organisme présent dans le méthaniseur à l'instant t .

Les phénomènes à modéliser sont :

- la croissance spontanée du micro-organisme (taux : a)
- la compétition interne (taux : b)
- la toxicité du biogaz produit sur le micro-organisme (taux : c)

* La quantité de biogaz produite jusqu'à l'instant t est égale à :

$$S(t) = \int_0^t q(s) ds$$

* La quantité q vérifie donc l'équation :

$$q'(t) = a q(t) - b q^2(t) - c q(t) \int_0^t q(s) ds$$

* On suppose également qu'à l'instant initial, on a $q(0) = q_0$.

Etape 2 : étude théorique du modèle

Pour simplifier l'étude, on effectue deux changements d'échelles :

→ en temps : $t \mapsto \frac{at}{b}$

→ pour la fonction : $q \mapsto \frac{bq}{a} = u$

et le modèle se réécrit :

$$\begin{cases} Ku'(t) = u(t) - u(t)^2 - u(t) \int_0^t u(s) ds \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

avec $K > 0$ unique paramètre

On peut réécrire cette équation sous la forme d'un système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = \frac{1}{K}(u - u^2 - uy) \end{cases} \quad (2)$$

en notant $y(t) = \int_0^t u(s) ds$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'assurer l'existence et l'unicité du couple $(y(t), u(t))$ pour tout $t > 0$.

Etape 3 : étude numérique du modèle

On se donne un pas de temps $h > 0$ et on cherche à approcher $u(h), u(2h), \dots, u(nh)$ à partir de $u(0)$, à l'aide de l'équation (1):

$$\begin{cases} Ku'(t) = u(t) - u(t)^2 - u(t) \int_0^t u(s) ds \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

On approche aussi simultanément
la quantité de biogaz produite :

$$S(t) = \int_0^t u(s) ds$$

aux mêmes instants: $S(h), \dots, S(nh)$

On note:

$\begin{cases} u_n : \text{approximation de } u(nh) \\ S_n : \text{approximation de } S(nh) \end{cases}$
et on propose le schéma suivant:

$$\begin{cases} S_0 = 0, u_0 > 0 \text{ fixé} \\ S_n = S_{n-1} + h \frac{u_{n-1} + u_n}{2} \quad (n \geq 1) \\ Ku_n = u_{n-1} + h \left(u_{n-1} - \frac{u_{n-1}^2}{2} - u_{n-1} S_{n-1} \right) \end{cases}$$

basé sur la méthode des trapèzes
(par S) et la méthode d'Euler
(pour u)

Etape 4 : simulation avec le logiciel Scilab

Objectif : observer l'évolution
de la quantité de microorganismes
dans le méthaniseur et calculer
la quantité totale de biogaz
produite :

$$\begin{aligned} * \mu_0 &\in \{0,1; 0,5; 1,5\} \\ * K &\in \{0,1, 0,5\} \end{aligned}$$

Pour aller plus loin :

→ étude qualitative du système

(2) : portrait de phase

→ calcul de la quantité maximale de biogaz produite.

Référence :

www.agreg.org

(texte de modélisation)