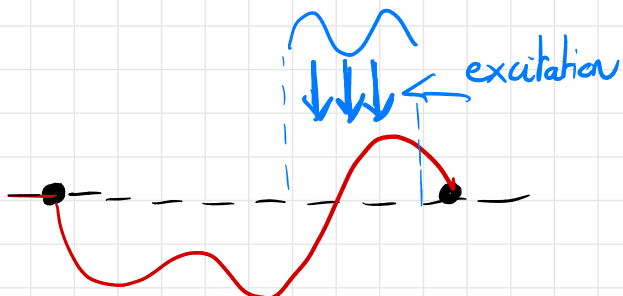
Un texte, une modélisation

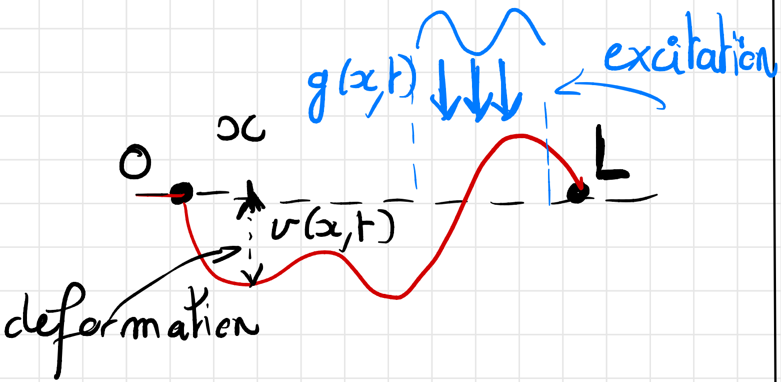
Laurent Dumas

Texte : la vibration d'une corde

* Objectif : modéliser la vibration d'une corde (ou d'une membrane) soumise à une excitation variable.
* Exemple étudié : vibration d'une corde avec excitation locale et périodique
* Outils mathématiques : équations aux dérivées partielles, séries de Fourier, algèbre linéaire.



Etape 1 : modélisation de la vibration d'une corde



* Force extérieure (excitation) :

$$g(x,t) = \underbrace{g(x)}_{\text{amplitude spatiale}} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{oscillations temporelles}}$$

* Sous certaines hypothèses simplificatrices, on admet que la déformation $(x,t) \mapsto v(x,t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = g(x,t) & (t \geq 0, x \in [0,L]) \quad \text{excitation} \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 & \text{corde fixée} \\ v(x,0) = 0 & \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{corde initiale au repos} \end{cases}}$$

* On peut montrer que ce système possède une unique solution

Etape 2 : décomposition de la déformation en modes propres

* La solution du système précédent peut se décomposer à l'aide des modes propres $x \mapsto u_k(x)$ et des fréquences propres $0 < \omega_0 < \dots < \omega_k \dots$ de la corde, définis comme suit :

$$\begin{cases} -u_k''(x) = \omega_k^2 u_k(x) \quad (k \in \mathbb{N}^*) \\ u_k(0) = u_k(L) = 0 \\ \left(\text{et} \quad \int_0^L u_k^2(s)\,ds = 1\right) \end{cases}$$

* Dans le cas présent :

mode propre

$$\boxed{\begin{cases} u_k(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \text{ et} \\ \omega_k = \frac{k\pi}{L} \end{cases}}$$

fréquences propres

* Pour une excitation d'amplitude : $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k u_k(x)$, on a alors

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t) u_k(x)$$

avec $t \mapsto y_k(t)$ solution de :

$$\begin{cases} y_k'' + \lambda_k y_k = \cos(\omega t) g_k \\ y_k(0) = y_k'(0) = 0 \end{cases}$$

Etape 3 : approximation de la solution par différences finies

* Une autre possibilité d'approximation de la solution $(x,t)\mapsto v(x,t)$ consiste à effectuer une discrétisation en espace :

$$x_0=0<x_1=\delta x<\dots<x_{N+1}=L$$

(avec $\delta x = L/_{N+1}$) et en temps :

$$t_0=0<t_1=\delta t<\dots t_{M+1}=T$$

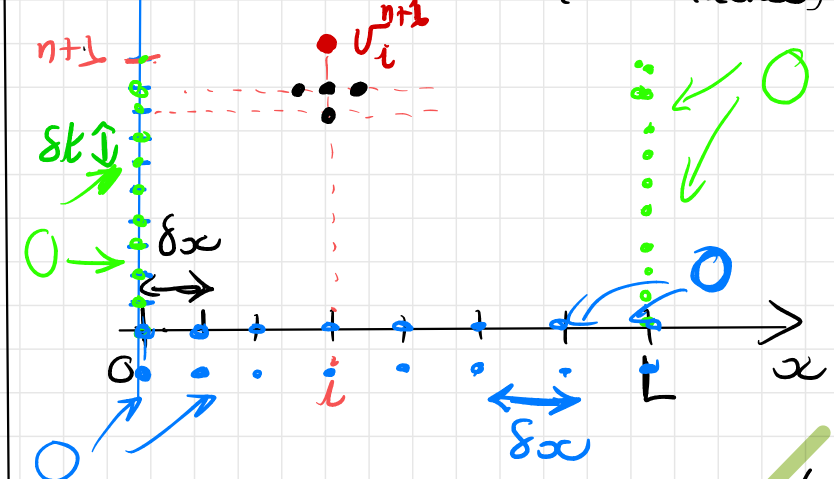
(avec $\delta t = T/_{M+1}$) de la solution exacte : $v_i^n \simeq v(x_i,t_n)$

* On propose le schéma suivant :

$$\frac{v_i^{n+1}-2v_i^n+v_i^{n-1}}{(\delta t)^2} - \frac{v_{i+1}^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{(\delta x)^2} = g(x_i,t_n)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} v_0^n = v_{N+1}^n = 0 & \text{(corde fixée)} \\ v_i^0 = 0 \text{ et } v_i^{-1}=0 & \text{(corde lachée)} \end{cases}$$



Etape 3 bis : calcul de la solution approchée

* le calcul de $(v_i^n)_{\begin{cases} n \geq 0 \\ 0 \leq i \leq N+1 \end{cases}}$ se fait de manière explicite avec l'opération matricielle :

$$V_{n+1} = A V_n - V_{n-1} + (\delta t)^2 G_n$$

avec

$$V_n = \begin{pmatrix} v_1^n \\ \vdots \\ v_N^n \end{pmatrix}, \quad G_n = \begin{pmatrix} g(x_1, t^n) \\ \vdots \\ g(x_N, t^n) \end{pmatrix}$$

et la matrice :

$$A = 2I - \left(\frac{\delta t}{\delta x}\right)^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

* On peut montrer que sous réserve d'une condition dite CFL :

$$\delta t \leq \delta x,$$

la solution approchée converge vers la solution exacte en $O\left((\delta t)^2 + (\delta x)^2\right)$

Etape 4 : simulation avec le logiciel Scilab/Python

* On simule la vibration d'une corde de longueur $L=1$ avec une excitation :

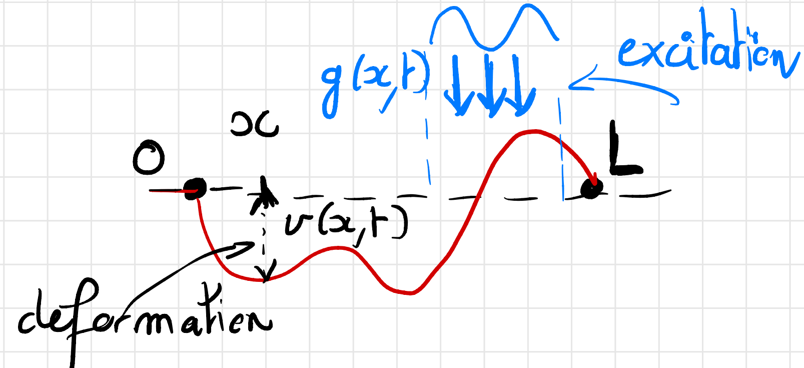
$$g(x,t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right)$$

$(0<a<b<1)$

avec 2 méthodes :

→ la décomposition (tronquée) en modes propres : 3 ou 20 modes

→ la méthodes des différences finies



* Après calculs, on obtient les coefficients suivants pour les modes :

$$\begin{cases} g_k = \dfrac{\sqrt{2}}{k\pi}\left(\cos(k\pi a) - \cos(k\pi b)\right) \\ \text{et} \\ y_k(t) = \dfrac{g_k}{(k\pi)^2 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \cos(k\pi t)\right) \end{cases}$$

Pour aller plus loin :

→ cas d'une membrane rectangulaire
→ formule de Weyl sur le comportement asymptotique des fréquences propres.

Références

* Texte agrégation "La corde vibrante"
* Qu'est ce que la modélisation ?

www.imose.fr