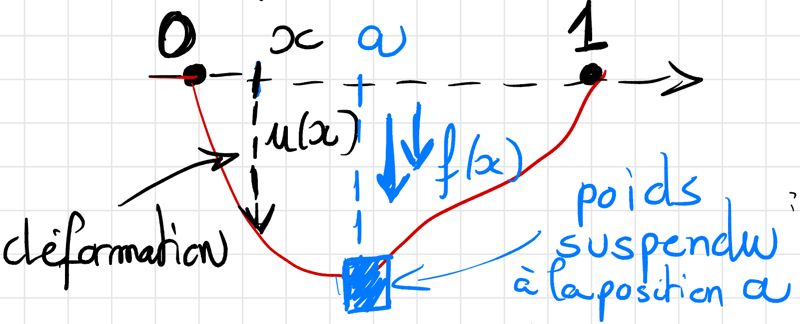
Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Texte : la rupture d'une corde

* **Objectif** : modéliser la déformation et le risque de rupture d'une corde
* **Exemple étudié** : calcul de la tension aux extrémités d'une corde, soutenant un poids à une position donnée.
* **Outils mathématiques** : équations différentielles, méthode des différences finies.

Etape 1 : modélisation de la déformation de la corde



* Caractérisitiques de la corde :

→ corde fixée aux extrémités :

$u(0) = u(1) = 0$

→ rigidité variable :

$k(x) \in [k_{min}, k_{max}]$

* Force extérieure liée au poids suspendu à la position a :

$x \longmapsto f^a(x) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$

* Après un bilan d'energie, la position d'équilibre de la corde satisfait l'équation différentielle :

$$\boxed{\begin{cases} -\dfrac{d}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{du^a(x)}{\partial x}\right) = f^a(x) \quad (x \in]0,1[) \quad (1) \\ u^a(0) = u^a(1) = 0 \end{cases}}$$

* On peut montrer que ce système possède une unique solution u^a.

Etape 2 : approximation par différences finies

* le système (1) précédent doit être résolu de manière approchée.

* Pour cela, on construit une discrétisation de l'intervalle $[0,1]$:

$$x_0 = 0 < x_1 = h < \dots < x_{N+1} = 1$$

avec $h = \dfrac{1}{N+1}$ (pas de discrétisation)

* Soit $(u_i)_{0\leq i\leq N+1}$ une approximation de $(u(x_i))_{0\leq i\leq N+1}$

* le système (1) est approché par le système (2) à $N+2$ équations :

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta^2(u)_i = f(x_i) & (1\leq i\leq N) \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases}} \quad (2)$$

avec

$$\Delta^2(u)_i = \frac{1}{h}\left(k_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - k_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)$$

et

$$\begin{cases} k_{i+\frac{1}{2}} = k\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right) \\ k_{i-\frac{1}{2}} = k\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right) \end{cases}$$

Etape 3 : résolution du système discrétisé et calcul du risque de rupture.

* Le système (2) revient à résoudre le système matriciel

$$\boxed{M\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}} \quad (3)$$

avec :

$$M = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & & 0 \\ m_{21} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & & m_{n,n-1} & m_{nn} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} m_{ii} = \dfrac{k_{i-\frac{1}{2}} + k_{i+\frac{1}{2}}}{2} \\ m_{i,i+1} = -k_{i+\frac{1}{2}} \text{ et } m_{i,i-1} = -k_{i-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

* Ce système possède une unique solution $(u_1, \dots u_N)$

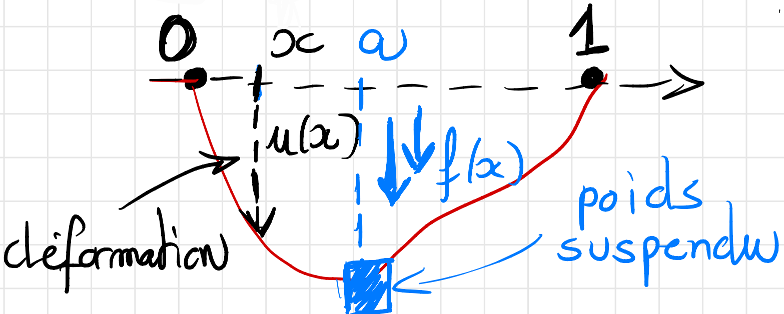
* Le risque de rupture avec un poids à la position a s'écrit :

$$R_a = \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{\partial u^a}{\partial x}(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{\partial u^a}{\partial x}(1)\right|^2$$

et est approché par :

$$\boxed{R_a^N = \frac{1}{2}\left|k_{\frac{1}{2}}\frac{u_1^a}{h}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k_{N+\frac{1}{2}}\frac{u_N^a}{h}\right|^2}$$

Etape 4 : simulation avec le logiciel Scilab/Python



* Rigidité de la corde :

$$k(x) = 1 + 0{,}8\sin(10x)\cos(5x)$$

* force exercée par un poids à la position $a \in]0,1[$

$$f(x) = 20\exp\left(-(20(x-a))^2\right)$$

Pour aller plus loin :

→ Détermination complète de l'équation (1) par bilan d'énergie.

→ Optimisation de la position du poids par minimisation avec un algorithme de gradient.

Références :

* Texte agrégation : "la corde à l'équilibre"
* Qu'est ce que la modélisation ?

www.imose.fr