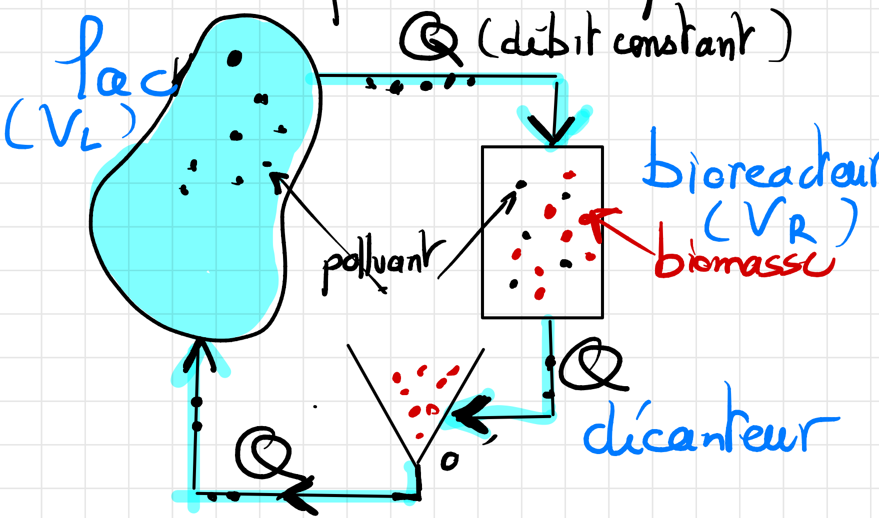
Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Texte 11 : dépollution d'un lac

* Objectif : ramener la concentration de polluant dans un lac en dessous d'un seuil critique.
* Exemple étudié : dépollution du lac à l'aide d'un bioréacteur fonctionnant en circuit fermé à débit constant, avec le lac
* Outils mathématiques : équations différentielles, optimisation.

Etape 1 : modélisation mathématique de la dépollution



On note :

- $x(t)$: concentration de biomasse (réacteur)
- $y(t)$: concentration de polluant (réacteur)
- $z(t)$: concentration de polluant (lac)

On a le système d'ED suivant :

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) y(t) - \dfrac{Q}{V_R} x(t) \\ y'(t) = -\mu x(t) y(t) + \dfrac{Q}{V_R}(z(t) - y(t)) \\ z'(t) = \dfrac{Q}{V_L}(y(t) - z(t)) \end{cases}}$$

(μ : loi de croissance de la biomasse)

En notant $V_R = 1$ et $V_L = 1/\varepsilon$, le système devient :

(2)

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = \mu x(t) y(t) - Q x(t) \\ y'(t) = -\mu x(t) y(t) + Q(z(t) - y(t)) \\ z'(t) = \varepsilon Q(y(t) - z(t)) \end{cases}}$$

avec $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$

Etape 2 : l'approximation lent - rapide

- On démontre mathématiquement que le système (2) peut être approché par un système lent - rapide lorsque ε est petit :

→ système rapide (dans le bioréacteur) (on pose $z \equiv z_0$ constant) : (3)

$$\boxed{\begin{cases} x'(s) = \mu\, x(s) y(s) - Q\, x(s) \\ y'(s) = -\mu\, x(s) y(s) + Q(z_0 - y(s)) \end{cases}}$$

avec $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$

- On peut montrer que lorsque $Q < Q_c = \mu z_0$, on a $(x(s), y(s)) \to (x^\infty, y^\infty)$ avec

$$\boxed{y^\infty = \frac{Q}{\mu}}\ (< z_0 : \text{dépollution !})$$

→ système lent (dans le lac)

le polluant dans le lac suit l'EDO découplée de (3) : (5)

$$\boxed{z'(t) = \varepsilon Q\,(y^\infty - z(t))}$$

Cette EDO possède une solution explicite :

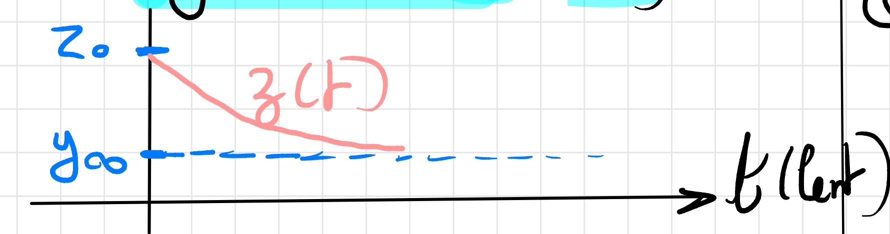
$$\boxed{z(t) = y^\infty + (z_0 - y^\infty) e^{-\varepsilon Q t}}$$

Etape 3 : recherche du débit optimal

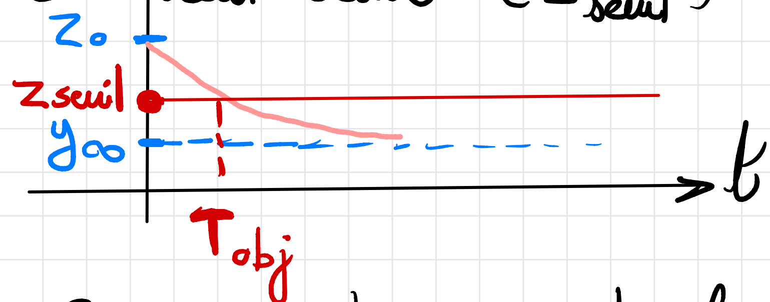
On obtient l'évolution approchée suivante :

→ système rapide (bioréacteur)

→ système lent (lac)



• On cherche à présent à optimiser le débit Q pour atteindre le plus rapidement possible la valeur seuil (z_{seuil}) :



. On recherche pour cela le minimum de la fonction

$$Q \mapsto \boxed{T_{obj}(Q) = \frac{1}{\varepsilon Q} \ln\left(\frac{z_0 - \frac{Q}{\mu}}{z_{seuil} - \frac{Q}{\mu}}\right)}$$

(résolution de $T_{obj}'(Q) = 0$)

Etape 4 : simulation avec le logiciel Jupyter

- On utilise la version notebook de Python pour simuler la dépollution d'un lac avec : $\mu = 1$, $\varepsilon = 0{,}001$.
- On résout (2) et (3) avec un schéma d'Euler explicite.
- on calcule la fonction $T_{obj}'(Q)$ par approximation par différences finies.

Pour aller plus loin :

→ justification mathématique de l'approximation lent-rapide.

→ optimisation de la dépollution avec débit variable.

Références

* Texte agrégation : « dépollution d'un lac »
* Qu'est ce que la modélisation ? www.imose.fr