Un texte, une modélisation

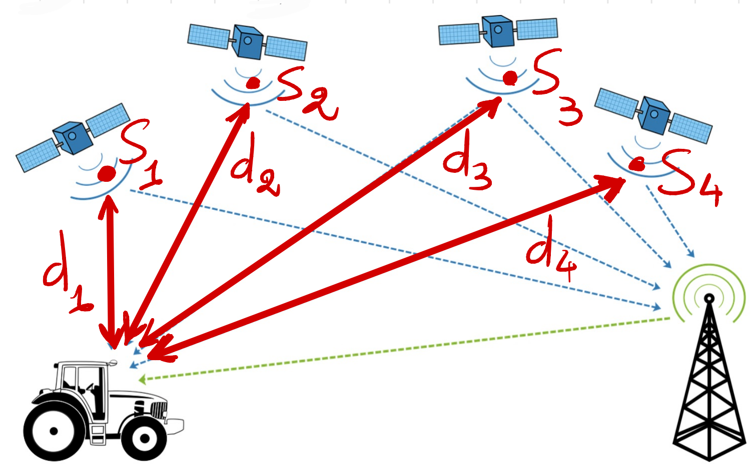
Laurent Dumas

Texte 7 : le GPS

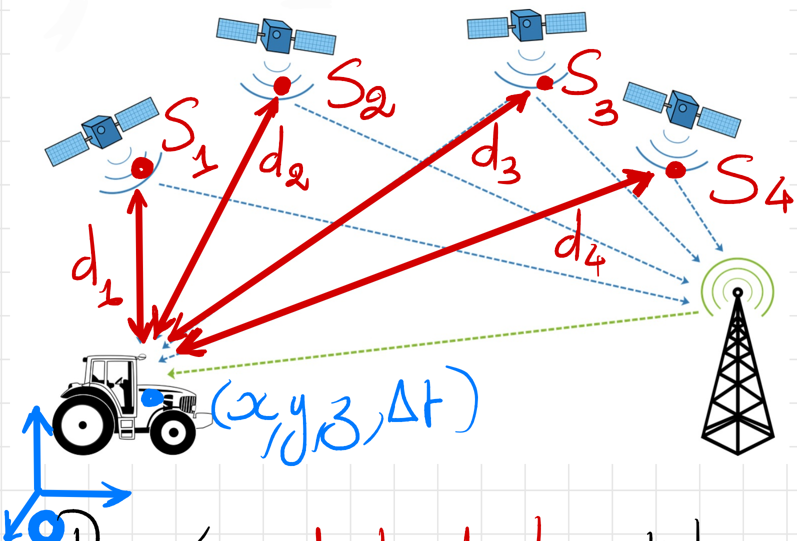
* **Objectif** : modéliser et illustrer le principe de localisation par GPS.

* **Exemple étudié** : déterminer la position exacte du tracteur, à partir de ses données de positionnement.

* **Outils mathématiques** : résolution de systèmes d'équations non linéaires



Etape 1 : équations à résoudre



* Données : d_1, d_2, d_3, d_4 : distance du tracteur aux 4 satellites.

et $S_i(x_i, y_i, z_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$: position des 4 satellites.

* Inconnues : x, y, z : position du tracteur

et Δt : écart d'horloge tracteur $\leftrightarrow$ satellites

* Equations :

on a le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} + c\,\Delta t = d_1 \\ \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} + c\,\Delta t = d_2 \\ \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2} + c\,\Delta t = d_3 \\ \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2} + c\,\Delta t = d_4 \end{cases}$$

Etape 2 : résolution du système par la méthode de Newton

Le système précédent se récrit :

$$\boxed{f(\xi) = d} \quad (1) \quad \text{avec :}$$

* $\xi = {}^t(x, y, z, \underbrace{c\Delta t}_{\omega})$

* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que :

$$f_i(\xi) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} + \omega \quad (1 \leq i \leq 4)$$

* $d = {}^t(d_1, d_2, d_3, d_4)$

La méthode d'approximation de Newton consiste à construire une suite d'approximations de ξ : $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots$ telle que :

$$\boxed{\begin{cases} \xi_0 \in \mathbb{R}^4 \text{ donné} \\ D(f).(\xi_{k+1} - \xi_k) = d - f(\xi_k) \end{cases}}$$

Matrice Jacobienne de f

avec

$$D(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_4}{\partial x} & \frac{\partial f_4}{\partial y} & \frac{\partial f_4}{\partial z} & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 2bis : une méthode explicite de résolution du système

Il est aussi possible de résoudre l'équation (1) : $f(\xi)=d$ de manière explicite :

* Tout d'abord, on récrit les équations de (1) :

$$\boxed{x_i^2+y_i^2+z_i^2-d_i^2-2(x_i x+y_i y+z_i z-d_i \omega) = -(x^2+y^2+z^2-\omega^2) \quad (1\leq i\leq 4)}$$

* En notant $L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$,

le système se récrit :

$$\boxed{\alpha-2BL\xi=-\langle\xi,\xi\rangle e} \quad (2)$$

avec $\alpha_i=\left\langle\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\\d_i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_i\\y_i\\z_i\\d_i\end{pmatrix}\right\rangle$,

$$B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1&d_1\\x_2&y_2&z_2&d_2\\x_3&y_3&z_3&d_3\\x_4&y_4&z_4&d_4\end{pmatrix}$$

et $e={}^t(1,1,1,1)$

Ici, le produit scalaire s'écrit : $\langle X,Y\rangle={}^tXLY$.

Etape 2bis (suite) : méthode explicite de résolution du système

on calcule alors $<\xi, \xi>$ avec le système (2) : on a

$$\boxed{a <\xi, \xi>^2 + b <\xi, \xi> + c = 0}$$

avec

$$\begin{cases} a = <B^{-1}e, B^{-1}e> \\ b = 2(<B^{-1}\alpha, B^{-1}e> - 2) \\ c = <B^{-1}\alpha, B^{-1}\alpha> \end{cases}$$

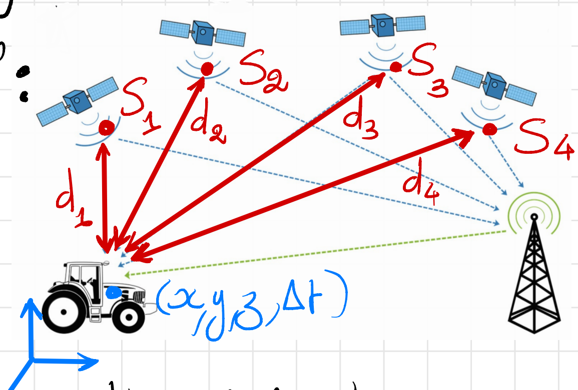
(en gardant la solution positive de cette équation)

puis on calcule enfin ξ avec (2) :

$$\boxed{L\xi = \frac{1}{2} B^{-1}(\alpha + <\xi, \xi> e)}$$

Etape 3 : simulation avec le logiciel Scilab

Objectif :



Calculer la position du tracteur avec :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & d_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & d_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & d_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -11716227.778 & -10118754.628 & 21741083.973 & 22163882.029 \\ -12082643.974 & -20428242.179 & 11741374.154 & 21492579.823 \\ 14373286.650 & -10448439.349 & 19596404.858 & 21492492.771 \\ 10278432.244 & -21116508.618 & -12689101.970 & 25284588.982 \end{bmatrix}$$

Pour aller plus loin :

→ modèle dynamique : comment ajuster le calcul quand le tracteur avance.

→ filtrage des incertitudes (filtre de Kalman)

Références :

* texte paru dans l'ouvrage "Mathématiques en situation"
* Qu'est ce que la modélisation ?

www.imose.fr