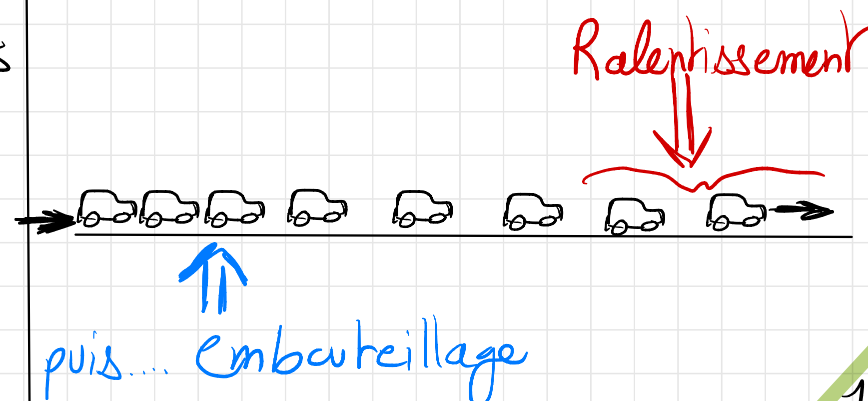
Un texte, une modélisation

Laurent Dumas

Texte 2 : Trafic routier

* Objectif : expliquer comment se forme un embouteillage sur une route ou une autoroute.
* Exemple étudié : véhicules se déplaçant à vitesse constante et sujets à un léger ralentissement.
* Outils mathématiques :

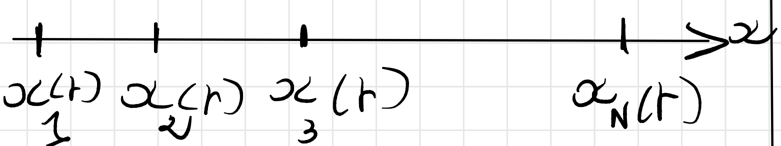
équations différentielles



Etape 1 : modélisation du trafic routier

* On considère N véhicules qu'on repère à chaque instant par leur position $(x_n(t))$

$1 \leq n \leq N$

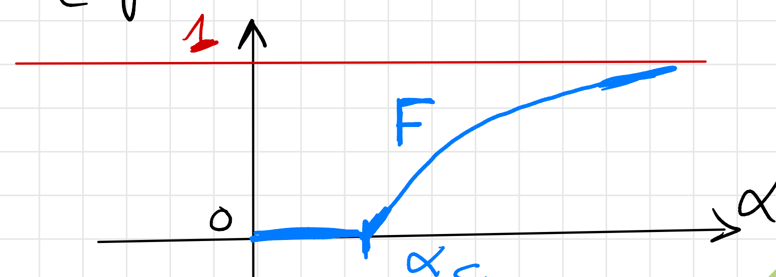


* On suppose que chaque conducteur adapte sa vitesse à la distance du véhicule qui le précède :

$$\boxed{\dot{x}_n(t) = V_{max} F(x_{n+1}(t) - x_n(t))}$$

$1 \leq n \leq N-1$

où : $\begin{cases} V_{max} \text{ vitesse maximale} \\ * \ F : \mathbb{R}_+ \to [0,1] \\ \text{fonction croissante} \end{cases}$



Etape 2 : états d'équilibre du système

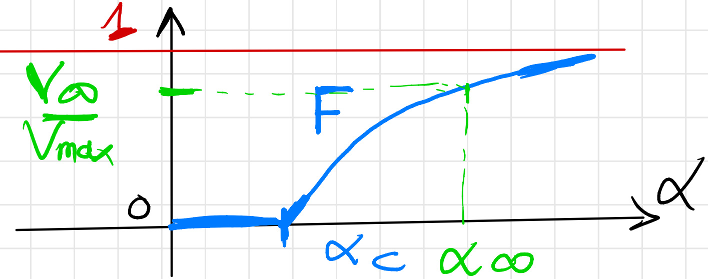
→ Cas de 2 véhicules (x_1, x_2) :

on suppose que $\dot{x}_2 = V_\infty$ (le véhicule de tête se déplace à vitesse constante).

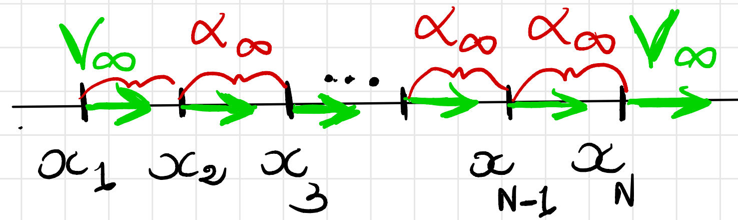
→ On note $\alpha(t) = x_2(t) - x_1(t)$

On a $\dot{\alpha} = 0$ si et seulement si $\alpha = \alpha_\infty$ tel que

$$V_{max} F(\alpha_\infty) = V_\infty$$



→ Cas de N véhicules :

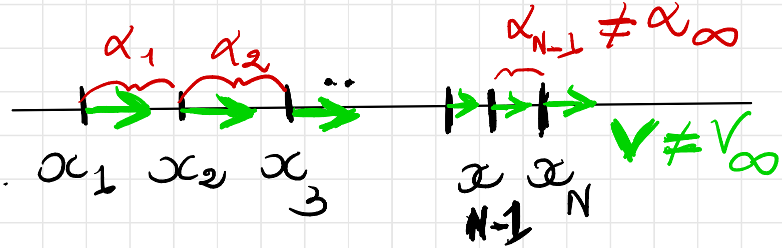


→ À vitesse constante : $V_\infty < V_{max}$

→ espacement constant : α_∞

Etape 3 : perturbation de l'état d'équilibre

On étudie l'effet d'une petite perturbation du système autour de l'état d'équilibre précédent :



On note $y_n(t) = x_n(t) - V_\infty t$

et on a :

$$\dot{y}_n(t) = V_{max}\left(F(\alpha_n) - F(\alpha_\infty)\right)$$

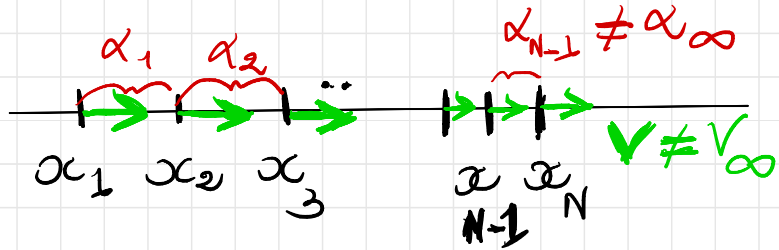
puis :

$$\boxed{\dot{\alpha}_n(t) = V_{max}\left(F(\alpha_{n+1}) - F(\alpha_n)\right) \approx V_{max} F'(\alpha_\infty)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)}$$

$(1 \leq n \leq N-1)$

Etape 4 : calcul de la vitesse de remontée de l'information

* On passe d'un modèle discret à un modèle continu :



$\Downarrow$

$f(t,x)$: densité de véhicules à la position x

$x \in \mathbb{R}$

* L'équation discrète :

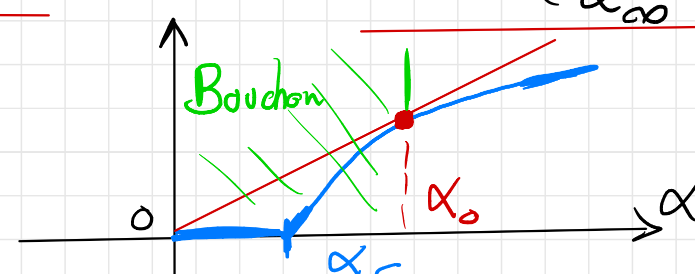
$$\dot{\alpha}_n = V_{max} F(\alpha_\infty)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$$

devient une équation continue :

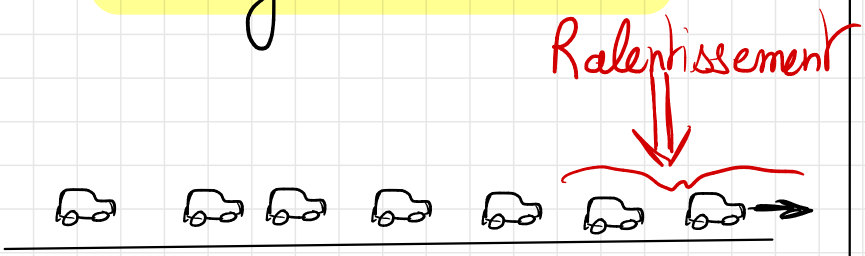
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \underbrace{V_{max} F'(\alpha_\infty)\alpha_\infty}_{\text{vitesse } c>0 \text{ (propagation vers la gauche)}} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$$

$\rightsquigarrow$ vitesse de remontée :

$$\boxed{V_0 = V_\infty - c = V_{max}\,\alpha_\infty\left(\frac{F(\alpha_\infty)}{\alpha_\infty} - F'(\alpha_\infty)\right)}$$



Etape 5 : simulation avec le logiciel Scilab



On prend :

$$N = 50$$

$$V_{max} = 30 \text{ m/s}$$

$$F(\alpha) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha - 10}{30}\right)$$

si $\alpha > \alpha_c = 10$ m et 0 sinon.

$\Rightarrow$ un bouchon se produit pour $\alpha_\infty < \alpha_0 \approx 31$ m

Pour aller plus loin :

→ Autres exemples : démarrage à un feu, insertion de véhicules dans le trafic, ...

→ Autres modélisations (discrètes ou continues)

Référence :

www.agreg.org

(texte de modélisation, 2006)