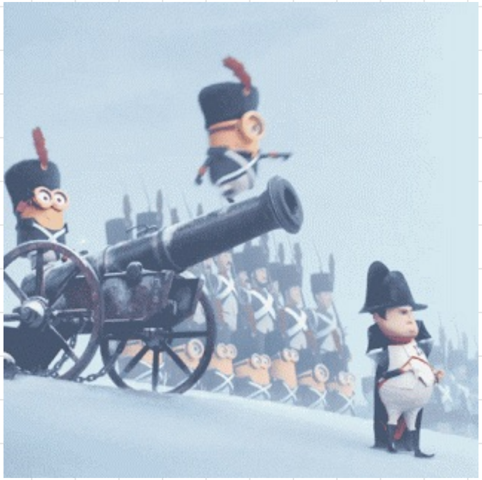
# Un texte, une modélisation

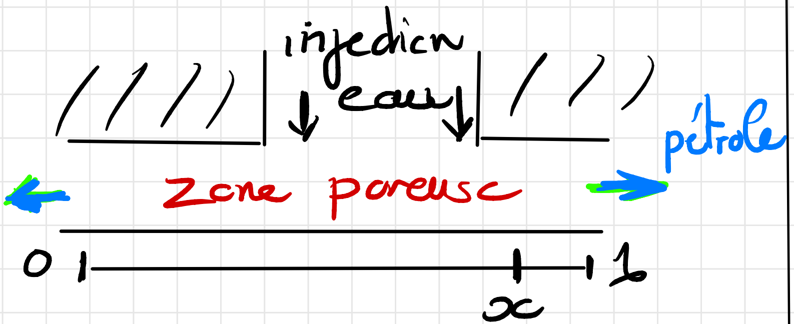
## Laurent Dumas

## Texte 12 : forage en milieu poreux

* Objectif : modéliser l'extraction de pétrole à partir d'un milieu poreux.
* Exemple étudié : on cherche à calculer le débit de pétrole, par une méthode de tir, dans le cas d'une situation mono-dimensionnelle.
* Outils mathématiques :
Equations différentielles, problème aux limites



# Etape 1 : modélisation de la captation du pétrole




- $Q(x)$ : débit de pétrole ($G \to D$)
- $p(x)$ : pression
- $f(x)$ : débit d'injection d'eau

On a $Q(b)-Q(a)=\int_a^b f(x)\,dx$

puis $\boxed{\dfrac{dQ(x)}{dx}=f(x)}$

* On suppose par ailleurs que :

$$\boxed{Q(x)=-\varphi\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)}$$

où $\varphi$ est une fonction : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $C^1$, strictement croissante, $\varphi(0)=0$.

* La pression $p:[0,1]\to\mathbb{R}$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$\boxed{\begin{cases}-\dfrac{d}{dx}\left(\varphi\left(\dfrac{dp(x)}{dx}\right)\right)=f(x)\\ p(0)=p(1)=0\end{cases}} \quad (1)$$

## Etape 2 : résolution mathématique du problème (1)

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\varphi\left(\dfrac{dp(x)}{dx}\right)\right) = f(x) \\ p(0) = p(1) = 0 \end{cases}$$

Si $p$ est solution de (1), en notant $\alpha = p'(0)$, $p$ vérifie aussi :

$$(2)\quad \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\varphi\left(\dfrac{d}{dx}p(x)\right)\right) = f(x) \\ p(0) = 0 \\ p'(0) = \alpha \end{cases}$$

* Le problème (2) possède pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une unique solution $p_\alpha \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ par le théorème de Cauchy Lipschitz.

On vérifie que :

$$p_\alpha(x) = \int_0^x \varphi^{-1}\left(\varphi(\alpha) - \int_0^t f(u)\,du\right)dt \qquad (3)$$

si $x \in ]0,1[$

* La fonction $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \alpha \to p_\alpha(1) \end{pmatrix}$ est $C^0$ strictement croissante et coercive.

Il existe donc un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p_\alpha(1) = 0$ (c'est $p$)

# Etape 3 : résolution numérique du problème (1)

* On utilise ici une méthode de "tir" pour déterminer $\alpha$ tel que $p_\alpha(1)=0$
* On rappelle :

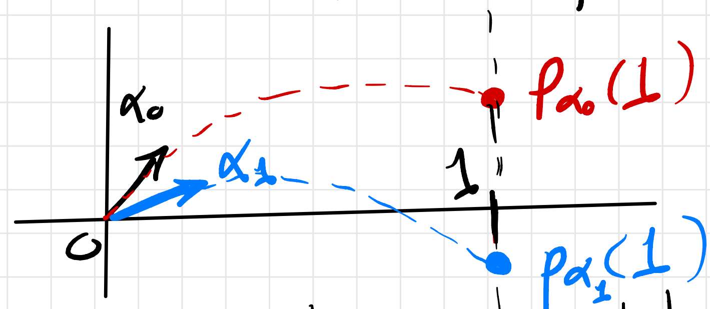
$$\boxed{p_\alpha(1) = \int_0^1 \varphi^{-1}\left(\varphi(\alpha) - \int_0^t f(u)\,du\right)dt}$$

* On calcule cette intégrale de manière approchée :

$$\boxed{\begin{cases} p_0 = 0\ ;\ S_0 = 0 \\ S_{i+1} = S_i + h f(x_{i+1}) & 0\le i\le N-1 \\ p_{i+1} = p_i + h\,\varphi^{-1}(\varphi(\alpha) - S_i) & 0\le i\le N \end{cases}}$$

avec $x_i = ih$ et $h = \dfrac{1}{N+1}$

On a alors $p_\alpha(1) \simeq p_{N+1}$



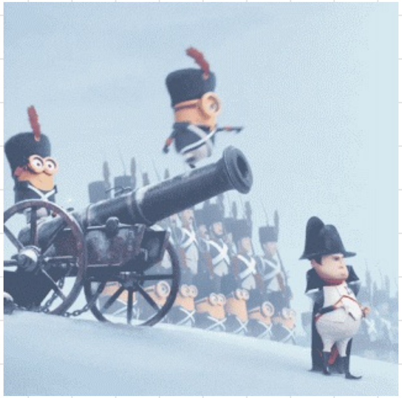

* La valeur de $\alpha$ correspondant à $p$ est obtenue par dichotomie

## Etape 4 : simulation avec Python

→ $f(x) = 10 . \mathbb{1}_{[0.6, 0.8]}$

→ $\varphi(\xi) = \xi . |\xi|$

→ $N = 100$



## Pour aller plus loin :

→ Autre méthode de résolution :
schéma aux différences finies)
non linéaire, résolu par la
méthode de Newton

## Référence :

* Texte agrégation "milieu poreux"
* Qu'est ce que la modélisation ?
  www.imose.fr