Contrôle continu 1: optimisation numérique

Exercice 1.

Soit f une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On note $g(x) = \nabla f(x)$ et $Hf(x)$ sa matrice Hessienne au point x. On définit la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$:

$$|||A||| = sup\,\{\frac{||Ax||}{||x||}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$

Soit $h \in \mathbb{R}^n$, on note

$$m(h) = f(x) + < g(x), h > + \frac{1}{2} < h, Bh >$$

où B est une matrice symétrique de taille n.

1. Montrer qu'il existe $s \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + < g(x), h > + \frac{1}{2} < h, Hf(x+sh)h >$$

(on pourra utiliser une formule de Taylor bien choisie sur $\mathbb{R}$).

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ qu'on précisera, tel que pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$||f(x+th) - m(th)|| \leq Ct^2||h||^2$$

Exercice 2.

Soit la fonction

$$J(x, y) = x^2 + y^2$$

à minimiser sur l'ensemble

$$S = \{(x, y) \in\ \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x-y)^2 \geq 4 \text{ et } y \geq 0\}$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution
2. Ecrire les conditions KKT associées au problème et déterminer l'ensemble de ses solutions.
3. Déterminer l'ensemble des minima globaux de J sur S.
4. Retrouver le résultat graphiquement.

Exercice 3.

On s'intéresse ici à un nouveau principe de recherche linéaire pour une méthode à direction de descente.

Soit f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$. On note g le gradient de la fonction f défini de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitz continu sur $\mathbb{R}^n$ avec une constante de Lipschitz égale à L.

On rappelle qu'une méthode de descente consiste à définir une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ partant d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec la relation :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

où d_k est une direction de descente (telle que $< d_k, g(x_k) >< 0$) et t_k est le pas correspondant.

Ici, le pas est donné par la règle suivante : t_k est tel que $t_k = 0$ si $g(x_k) = 0$ et sinon

$$h(t_k) = min\{h(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$$

où on a noté $h(t) = f(x_k + td_k)$.

On suppose dans toute la suite que la direction d_k est celle de la plus forte pente :

$$d_k = -g(x_k)$$

1. Prouver que la condition choisie est valide, c'est à dire que t_k existe pour tout $k \geq 0$. Représenter graphiquement un exemple de tel pas pour une fonction arbitraire (non convexe).
2. En utilisant une égalité de Taylor, prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$h(t) \leq h(0) - t||g(x_k)||^2 + t^2 L \frac{||g(x_k)||^2}{2}$$
3. Montrer que
$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{1}{2L}||g(x_k)||^2$$
   On pourra étudier la fonction
$$u(t) = h(0) - t||g(x_k)||^2 + t^2 L \frac{||g(x_k)||^2}{2}$$
4. En déduire que
$$\lim_{k\to+\infty} g(x_k) = 0$$
5. Quelle est le principal défaut de cette méthode ?