CC1 : optimisation numérique corrigé

1

Ex 1) 5 pts

1) On note $m(t) = f(x+th)$, m C^2 et on a

$$\begin{cases} m'(t) = \langle h, \nabla f(x+th)\rangle \\ m''(t) = \langle h, Hf(x+th).h\rangle \end{cases}$$

Par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, il existe $s \in [0,1]$ tq :

$$m(1) = m(0) + (1-0)m'(0) + \frac{1}{2}(1-0)m''(s)$$

soit le résultat demandé

(3 pts)

2) En appliquant le résultat précédent à th, il existe $s_t \in [0,1]$ tel que :

$$f(x+th) = f(x) + t\langle h, g(x)\rangle + \frac{t^2}{2}\langle h, H(s_t)h\rangle$$

Il vient :

$$f(x+th) - m(th) = \frac{1}{2}t^2\langle h, (Hf(s_t) - B)h\rangle$$

puis

$$\|f(x+th) - m(th)\| \leq Ct^2\|h\|^2 \text{ avec}$$

$$C = \frac{1}{2}\left(\max_{u\in[x,x+th]} |||Hf(u)||| + |||B|||\right)$$

($|||\ \ |||$: norme subordonnée associée à $\|\ \ \|$)

(2 pts)

Ex 2) 11 pts

1) J est coercive et continue de manière évidente.

De plus S est fermé (intersection et inégalités larges). Ainsi, J possède au moins un minimum sur S. (2 pts)

2) On a

$$\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = x^2+y^2+\mu_1(-y)+\ldots$$
$$+\mu_2\left(4-\frac{1}{2}(x+y)^2-(x-y)^2\right)$$

Sous réserves de qualification, si (x,y) est un minimum de J sur S, il existe (μ_1,μ_2) tels que :

$$\begin{cases} 2x-\mu_2\left[(x+y)+2(x-y)\right]=0 \\ 2y-\mu_1-\mu_2\left[(x+y)-2(x-y)\right]=0 \\ y\geq 0,\ \frac{1}{2}(x+y)^2+(x-y)^2\geq 4 \\ \mu_1\geq 0,\ \mu_2\geq 0 \\ \mu_1 y=\mu_2\left(\frac{1}{2}(x+y)^2+(x-y)^2-4\right)=0 \end{cases}$$

2

(2 pts)

3) On considère les 4 cas suivants :

Cas 1 : $\mu_1=\mu_2=0$ (0 contraintes actives)

on a alors

$$\left.\begin{array}{l} 2x=0 \\ 2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=0 \text{ absurde}$$

car $(0,0)\notin S$.

Cas 2 : $\mu_2=0$ (1ère contrainte active)

On a alors :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - \mu_1 = 0 \\ (x,y) \in S,\ \mu_1 \geq 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

De même, il n'y a pas de solution

Cas 3 : $\mu_1 = 0$ ($2^{\text{ème}}$ contrainte active)

On a alors

$$\begin{cases} 2x - \mu_2(3x-y) = 0 \\ 2y - \mu_2(-x+3y) = 0 \\ (x,y) \in S,\ \mu_2 \geq 0 \text{ et } \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x-y)^2 = 4 \end{cases}$$

En sommant, il vient $(x+y)(2-2\mu_2) = 0$

En soustrayant, on a :

$(x-y)(2-4\mu_2) = 0$

Il y a seulement 2 cas possibles :
(sinon $x = y = 0$)

Soit :

$\mu_2 = 1$ puis $\frac{1}{2}(2x)^2 = 4$, soit

$x = y = \sqrt{2} \geq 0$

On a donc trouvé la solution :

$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, 1)$

Soit :

$\mu_2 = \frac{1}{2}$ puis $x = -y$ et

$(2x)^2 = 4$, soit la solution :

$(-1, 1, 0, \frac{1}{2})$

Cas 4 : 2 contraintes actives.

On a le système :

$$\begin{cases} 2x-\mu_2(3x-y)=0 \\ 2y-\mu_1-\mu_2(-x+3y)=0 \\ y=0,\ \frac{1}{2}(x+y)^2+(x-y)^2=4 \\ \mu_1,\mu_2\geq 0 \end{cases}$$

De même, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3x\mu_2=0 \\ -\mu_1+x\mu_2=0 \\ \frac{3}{2}x^2=4 \end{array}\right\}$$

Comme $x\neq 0$, il vient $\mu_2=2/3$

puis $x=\pm\sqrt{8/3}$ et $\mu_1=x\mu_2$

L'unique solution est donc

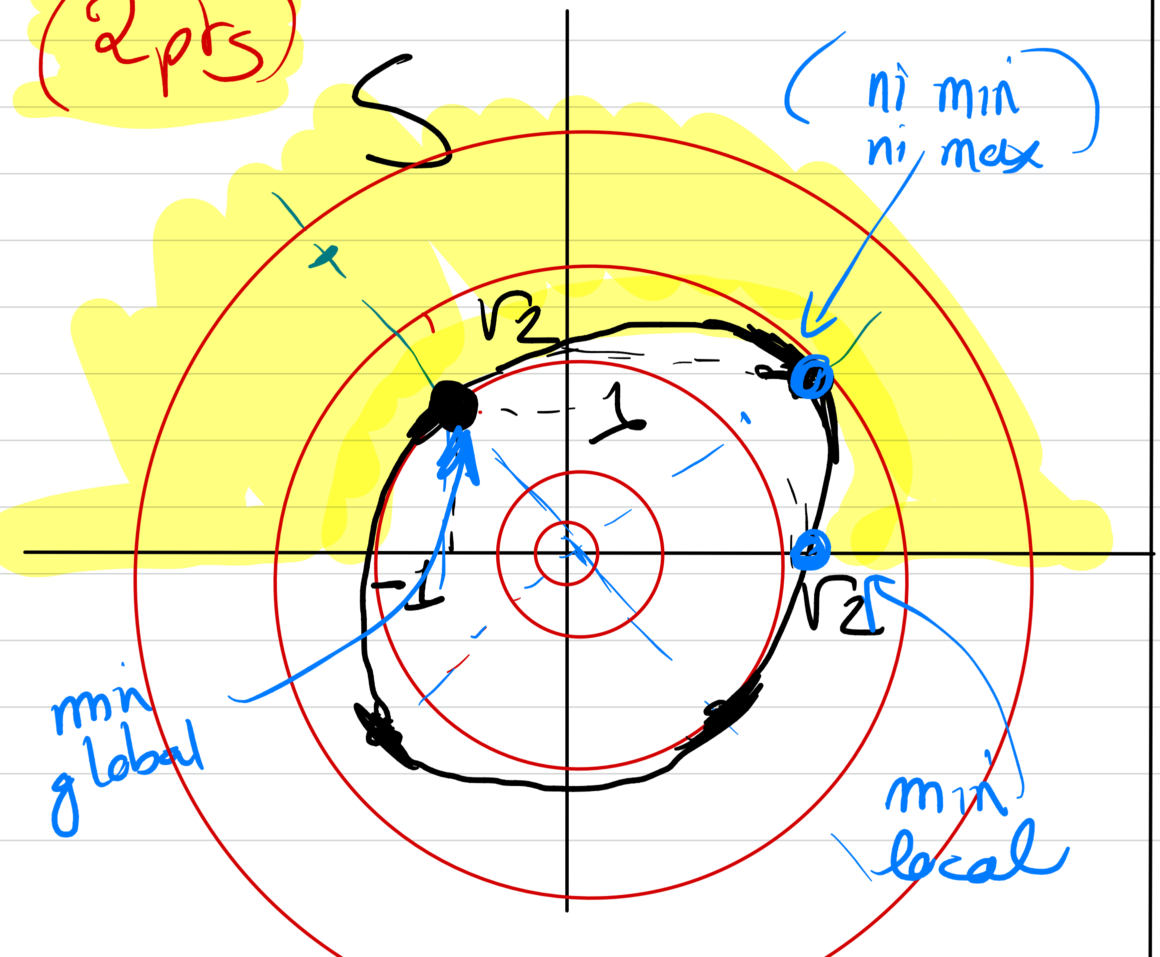
$$\left(\sqrt{8/3},0,\ \tfrac{2}{3}\sqrt{8/3},\tfrac{2}{3}\right)$$

A noter que les contraintes sont qualifiées sur S entier (vecteurs $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et/ou $\begin{pmatrix}3x-y\\3y-x\end{pmatrix}$ libres) (4pts)

3) On calcule les valeurs aux 3 points obtenus. C'est en $(-1,1)$ que J est minimale. Il s'agit bien du minimum global de J sur S puisque celui-ci existe. (1pt)

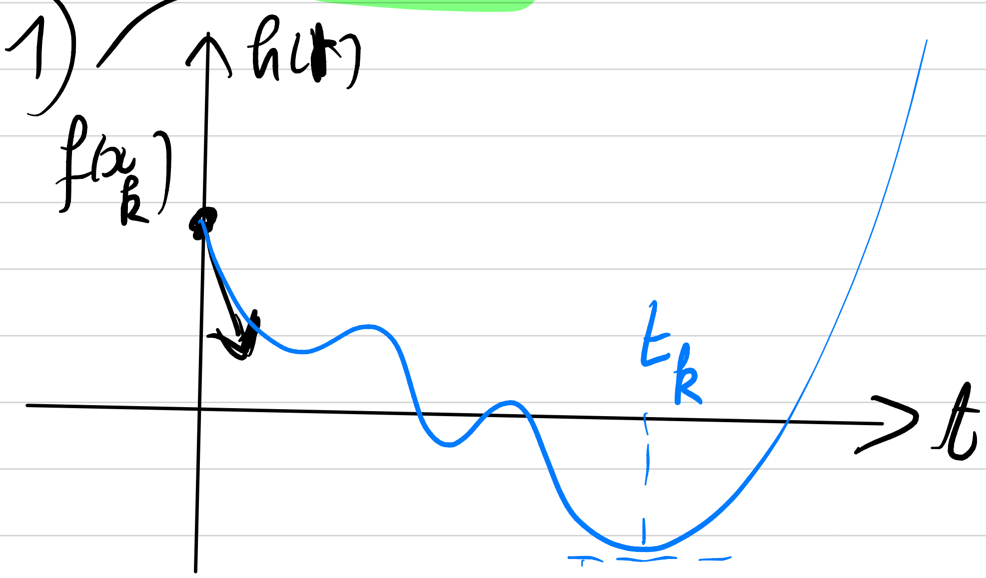
4) On dessine (approximativement) les lignes de niveau de J (cercles concentriques) et le domaine S (extérieur d'une ellipse intersecté avec demi-plan)

(2pts)



Ex3) 11 pts

1)



La condition est valide car h est coercive (et continue) sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ est fermé. h possède donc un minimum global sur $\mathbb{R}_+$. (2pts)

2) On écrit

$$h'(t) = \langle d_k, g(x_k + t d_k) \rangle$$

Comme g est L-Lipschitz, il vient :

$|h'(s)-h'(0)| \leq \|d_k\| . L \|s d_k\|$

(avec Cauchy-Schwarz)

En intégrant entre 0 et t on a

$$\int_0^t (h'(s)-h'(0))dt \leq \int_0^t |h'(s)-h'(0)|ds$$

$$\leq L\frac{t^2}{2}\|d_k\|^2, \text{ soit}$$

$$f(x_k+td_k)-f(x_k)-t\langle d_k, g(x_k)\rangle \leq L\frac{t^2}{2}\|d_k\|^2.$$

Avec $d_k=-g(x_k)$, on a le résultat demandé.

(3 pts)

3) Avec l'indication, $t\mapsto u(t)$ est un polynôme du second degré, minimal pour t_{min} tq

$$-\|g(x_k)\|+2Lt_{min}\|g(x_k)\|^2=0,$$

soit $t_{min}=\frac{1}{L}$.

Il vient donc

$$h(t_k)=f(x_{k+1})\leq h(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}_+$$

En particulier, si $t=t_{min}$, on a :

$$f(x_{k+1})\leq u(t_{min})=f(x_k)-\frac{1}{2L}\|g(x_k)\|^2$$

(3 pts)

4) on écrit

$$f(x_k)-f(x_{k+1})\geq\frac{1}{2L}\|g(x_k)\|^2$$

et on somme de 0 à N-1 :

$$2L(f(x_0)-f(x_N)) \geq \sum_{k=0}^{N} \|g(x_k)\|^2$$

Comme $2L(f(x_0)-f(x_N)) \leq Cste$ (car f minorée), alors la série $\sum_k \|g(x_k)\|^2$ est convergente. On en déduit que $\lim_{k\to+\infty} g(x_k) = 0$ (2pts)

5) Cette méthode est convergente mais elle n'est pas facilement implémentable car elle suppose de résoudre un problème d'optimisation sur $\mathbb{R}_+$ à chaque itération.

(1pt)