

TD 1 Optimisation: introduction et rappels

Exercice 1 . On considère la fonction sur \mathbb{R}^n :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + b$$

où $Q \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\nabla f(x)$ et $Hf(x)$.

Exercice 2. On considère la fonction sur \mathbb{R}^2 :

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Calculer le modèle quadratique approché de f en $(1, 1)$.

Exercice 3

1. Tracer quelques lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 y$
2. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe et ne possédant pas de point critique.
3. Soit $\beta \in]0, 1[$ et f une fonction C^1 et minorée. Montrer que si d est une direction de descente pour f en x , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f(x + \alpha d) = f(x) + \beta \alpha \langle d, \nabla f(x) \rangle >$$

On pourra commencer par une conjecture graphique.

Exercice 4

1. Représenter graphiquement quelques lignes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2 + 1$$

puis représenter pour un point sur une des lignes de niveau, le gradient en ce point et un exemple de direction de descente.

2. Soit f une fonction différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d \in \mathbb{R}^n$ est tel que

$$\|\nabla f(x) + d\| \leq \|\nabla f(x)\|$$

Montrer que d est une direction de descente de f en x .

3. Soit f une fonction différentiable et convexe de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Soient x et y dans \mathbb{R}^n tels que $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x .