

TD 2 Optimisation: introduction et rappels (partie 2)

Exercice 1.

On considère la fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur \mathbb{R}^n . Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Exercice 2

Soit la fonction.

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 4x - 2$$

et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$$

1. l'ensemble B est-il fermé ? convexe ? borné ?
2. Montrer que g possède au moins un minimum sur B .
3. Ecrire les conditions KKT satisfaites par un minimum de g sur B .
4. Déterminer l'ensemble des minimum de g sur B .

Exercice 3

Soit la fonction.

$$J(x, y) = x^4 + y^2 + 2xy$$

à minimiser sur l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \leq 1 \text{ et } x + y \leq 1\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble D .
2. Montrer que le point $(0, 0)$ n'est pas un minimum local de J sur D .

3. Montrer que J possède un minimum global sur D .
4. Ecrire les relations KKT et en déduire l'ensemble des minima locaux de J sur D .

Exercice 4

On considère la fonction

$$f(x, y) = x + y$$

sur l'ensemble

$$\Omega = \{ y \leq 0, y \geq x^3 \}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble Ω .
2. Rechercher graphiquement le maximum de f sur Ω .
3. Le point obtenu satisfait-il les relations KKT ? Expliquer.

Exercice 5.

On considère la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive.
2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 .
3. En déduire que g possède un unique minimum sur \mathbb{R}^2 et le déterminer.
4. Déterminer le minimum de g sur $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 3\}$.
5. Soit l'ensemble $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \text{ et } x + y \geq 2\}$. Montrer que X_2 est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de g sur X_2 .