

## TD 4: optimisation locale avec contraintes

L'objectif général de ce TD est d'étudier la convergence de trois algorithmes de recherche de minimum local avec contraintes : le gradient projeté, la méthode de pénalisation et l'algorithme d'Uzawa pour un cas particulier.

Dans tout le TD, on s'intéresse à la minimisation d'une fonction quadratique  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$J(x) = \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x$$

avec  $A$  une matrice symétrique définie positive de taille  $n$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ , sous la contrainte

$$C x = d$$

avec  $C$  une matrice de taille  $p \times n$  ( $p < n$ ), de rang maximal  $p$  et  $d \in \mathbb{R}^p$ .

On note  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$ .

### Exercice 1 (étude théorique)

1. Montrer que  $J$  admet un unique minimum global  $x^*$  sur  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx = d\}$ .
2. Montrer qu'il existe un unique  $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$  tel que

$$\begin{cases} Ax^* + {}^t C \lambda^* = b \\ Cx^* = d \end{cases}$$

### Exercice 2 (méthode de pénalisation)

On considère la fonction pénalisée :

$$J_\rho(x) = J(x) + \frac{\rho}{2} \|Cx - d\|^2$$

o  $\rho > 0$  est un paramètre de pénalisation.

1. Montrer que  $J_\rho$  possède un unique minimum  $x_\rho$  sur  $\mathbb{R}^n$ .
2. Montrer que pour tout  $\rho > 0$ , on a  $J(x_\rho) \leq J(x^*)$ .
3. En déduire que la famille  $(x_\rho)_{\rho > 0}$  est bornée.
4. Montrer que la seule valeur d'adhérence possible de toute suite  $(x_{\rho_n})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\rho_n \rightarrow +\infty$  est égale à  $x^*$ .
5. En déduire que toute suite  $(x_{\rho_n})_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\rho_n \rightarrow +\infty$  tend vers  $x^*$ .

**Exercice 3 (méthode du gradient projeté)**

On note  $P_\Omega$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur le convexe fermé  $\Omega$ , c'est à dire que  $P_\Omega(x) \in \Omega$  et

$$\|x - P_\Omega(x)\| = \min_{v \in \Omega} \|x - v\|$$

1. Montrer que  $x^*$  est tel que

$$\forall v \in \Omega, \quad \langle \nabla J(x^*), v - x^* \rangle \geq 0$$

En déduire que pour tout  $\rho > 0$ ,

$$x^* = P_\Omega(x^* - \rho \nabla J(x^*))$$

2. On considère l'algorithme du gradient projeté à pas constant : partant de  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ , on construit la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que

$$u_{k+1} = P_\Omega(u_k - \rho \nabla J(u_k))$$

Montrer que si  $\rho < \frac{2}{\lambda_n}$ , alors la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x^*$ .

**Exercice 4 (méthode d'Uzawa)**

On considère l'algorithme suivant : soit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$  et  $\rho > 0$ . On construit les suites  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ainsi :  $Au_0 = b - {}^t C \lambda_0$  puis

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Cu_k - d) \\ Au_{k+1} = b - {}^t C \lambda_{k+1} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|^2 + (\rho^2 \|C\|^2 - 2\rho\lambda_1) \|u_k - x^*\|^2$$

2. En déduire qu'il existe  $\rho_1 > 0$  tel que si  $\rho < \rho_1$ , la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x^*$ .