

## TD 5: algorithmes d'optimisation sans gradient

### Exercice 1

On considère la méthode 'pattern search' pour minimiser la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avec un nombre fini de directions  $\mathcal{D}$  tel que

$$\forall d \in \mathcal{D}, \quad \|d\| = 1$$

et

$$\kappa = \min_{\|v\|=1} \max_{d \in \mathcal{D}} v^T d > 0$$

On note  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  la suite de points construite avec la méthode et  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  le pas associé. On rappelle que le critère de succès est le suivant :

$$f(x_k + \alpha_k d) < f(x_k) - c \frac{\alpha_k^2}{2}$$

où  $c > 0$  est fixé et que  $\alpha_{k+1} = \theta \alpha_k$  (respectivement  $\alpha_{k+1} = \gamma \alpha_k$ ) dans le cas d'un échec (respectivement succès) avec  $\theta \in ]0, 1[$  et  $\gamma \geq 1$ .

Le lemme suivant peut être démontré :

**Lemma** On suppose que  $f$  est  $C^1$ ,  $\nabla f$  est  $\nu$ -Lipschitz et que  $f$  est minorée par  $m \in \mathbb{R}$ . Alors, la suite de pas satisfait pour tout  $N \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^2 \leq \frac{2\gamma^2}{c(1-\theta^2)} \left( \frac{c\alpha_0^2}{2\gamma^2} + f(x_0) - m \right)$$

1. Prouver que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad |f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T (y - x)| \leq \frac{\nu}{2} \|y - x\|^2$$

2. Prouver que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  et que le nombre de pas d'échecs est infini.

3. Prouver que pour un pas d'échec, on a

$$\|\nabla f(x_k)\| \leq \frac{c + \nu}{2\kappa} \alpha_k$$

4. Prouver que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

## Exercice 2

On considère la méthode de Nelder Mead pour minimiser la fonction  $\mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

et un simplexe initial formé de  $A = (4, 5)$ ,  $B = (5, 3)$  et  $C = (5, 6)$ .

Calculer la solution obtenue après une itération.

## Exercice 3

Prouver qu'aucun pas de 'rétrécissement' n'est possible pour la minimisation d'une fonction convexe avec la méthode de Nelder Mead.

## Exercice 4

On note  $S_k = \{y_k^0, \dots, y_k^n\}$  le simplexe obtenu par la méthode de Nelder Mead à l'itération  $k$  associé aux valeurs suivantes pour la fonction  $f : f_k^0 \leq f_k^1 \leq \dots \leq f_k^n$ .

On suppose que la fonction  $f$  est minorée.

1. Prouver que la suite  $(f_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$  est convergente.
2. Si un nombre fini de 'rétrécissements' survient, prouver que toutes les suites  $(f_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$  sont convergentes ( $0 \leq i \leq n$ ).
3. On définit le volume du simplexe :

$$V(S_k) = \frac{1}{n!} \det[y_k^0 - y_k^n, \dots, y_k^{n-1} - y_k^n]$$

Vérifier que pour  $n = 2$  la définition de  $V(S_k)$  correspond à l'aire du triangle  $(S_k)$ .

4. Donner la valeur de  $V(S_{k+1})$  en fonction de  $V(S_k)$  quand un pas d'expansion se produit (on pourra supposer pour simplifier que  $y_k^n = 0$ ).
5. Donner la valeur de  $V(S_{k+1})$  en fonction de  $V(S_k)$  quand un pas de rétrécissement se produit.