Université de Versailles Année 2023-2024
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/M1-optim.html M1, semestre 1

TD 6: optimisation par metaheuristiques

Exercice 1

1. Expliquer le principe de chaque terme dans la probabilité d'accepter le point y à partir du point x dans le cas d'un recuit simulé :

$$p = \exp(-\frac{f(y) - f(x)}{T_n})$$

2. Expliquer les principes d'exploitation et d'exploration dans la formule de réactualisation des vitesses dans un algorithme PSO :

$$v_i \mapsto wv_i + c_1\phi_1 \otimes (p_i - x_i) + c_2\phi_2 \otimes (p_g - x_i)$$

   Dans cette formule, que se passe t-il pour l'algorithme si on prend respectivement $w = 0$, ou $c_2 = 0$?

Exercice 2

Dans une stratégie d'évolution pour minimiser une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, on choisit d'utiliser la mutation gaussienne $y = x + h$ où la densité de la variable alétoire $h \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$p(h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(C)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}{}^t hC^{-1}h)$$

1. Calculer la moyenne de la variable aléatoire h. Dans le cas isotrope ($C = \alpha I_n$) et avec $n = 1$ que vaut la variance de la variable aléatoire h ?
2. Représenter approximativement (à l'ordre 2) les lignes de niveaux d'une fonction f supposée C^2 près d'un minimum noté x^* (on pourra prendre un exemple en dimension 2).
3. De manière générale, quel est le meilleur choix pour la matrice C par rapport à $Hf(x)$ (Hessien de f en x) si x se trouve proche de x^* ? Expliquer votre réponse sur le graphique précédent.

Exercice 3.

On cherche à comparer la façon dont intervient la fonction J qu'on cherche à minimiser, dans les trois algorithmes suivants : recuit simulé, stratégie d'évolution et PSO.

1. Dans le recuit simulé, l'algorithme est-il modifié si la fonction J est remplacée par la fonction $4J$, respectivement $J+3$? Que se passe t-il dans le cas d'un algorithme PSO ? Justifier la réponse.
2. Dans une stratégie d'évolution, est-il possible de garder à la génération suivante le plus mauvais individu ?

Exercice 4

La méthode du classement stochastique décrite ci-dessous permet de classer λ individius dans un problème d'optimisation avec contrainte.

```
I_j = j ∀ j ∈ {1, ..., λ}
for i = 1 to λ do
    for j = 1 to λ − 1 do
        sample u ∈ U(0, 1) (uniform random number generator)
        if (φ(x_{I_j}) = φ(x_{I_{j+1}}) = 0) or (u < P_f) then
            if f(x_{I_j}) > f(x_{I_{j+1}}) then
                swap(I_j, I_{j+1})
            fi
        else
            if φ(x_{I_j}) > φ(x_{I_{j+1}}) then
                swap(I_j, I_{j+1})
            fi
        fi
    od
    if no swap done break fi
od
```

Fig. 2. Stochastic ranking procedure, $P_f = 0.45$.

Dans cet algorithme, f est la fonction coût à minimiser et Φ la pénalisation et P_f est un paramètre.

1. Que se passe t-il quand $P_f = 0$, respectivement 1 ?
2. Ecrire une fonction Python de classement alétaoire de λ individus pour une fonction f et une pénalisation Φ données.

Exercice 5

1. Comparer une stratégie d'évolution ES(1+1), c'est à dire avec $\lambda = \mu = 1$ et une sélection de type '+', avec un recuit simulé.
2. Expliquer pourquoi la ligne :

   `sigma=sigma*exp(1/3*(tau-1/5)/(1-1/5))`

   permet de faire évoluer de manière pertiente un opérateur de mutation dans un algorithme génétique. Que représentent les paramètres `sigma` et `tau` dans cette formule ?
3. Indiquer de quelle manière intervient l'aléa dans une méthode PSO. S'agit-il d'une méthode élitiste ?