Contrôle continu 1: optimisation numérique

Exercice 1.

On considère la fonction h dfinie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$h(x,y,z) = xyz + yz + xz + xy$$

1. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^3$ où le matrice hessienne de h est semi-définie positive est le point $(-1,-1,-1)$.
2. Montrer que h ne possède aucun minimum local sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2,$$

On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - x^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 2\}$$

1. D est-il convexe ? fermé ? borné ?
2. Montrer que u possède un minimum sur D.
3. Déterminer graphiquement les points où u atteint son minimum sur D.
4. Quels sont les points qualifiés de D ?
5. En écrivant les relations de KKT et en résolvant le système, déterminer les points où u atteint son minimum sur D.

Exercice 3.

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x,y) := x^2 + \alpha y^2 + xy + x$ pour un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. On cherche à minimiser f_α sur

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \leq 1\}$$

a) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Rsoudre le problème posé dans ce cas.

b) Lorsque f_α n'est pas convexe, f_α possède-t-elle un minimum sur C ?

Exercice 4.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que f est C^1 et γ-convexe, c'est à dire que f est strictement convexe et vérifie les deux propriétés :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \frac{\gamma}{2}||v-u||^2 + < \nabla f(u), v-u > + J(u) \leq f(v)$$

et :

$$\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \gamma ||v-u||^2 \leq < \nabla f(v) - \nabla f(u), v-u >$$

On suppose de plus que ∇f est Lipschtizien sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, ||\nabla f(v) - \nabla f(u)|| \leq L \, ||v-u||$$

1. Montrer que la fonction f possède un unique minimum global sur $\mathbb{R}^n$, noté x^*.

   On considère la méthode de descente de gradient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à pas optimal, c'est à dire telle que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et
   $$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$
   avec α_k étant choisi tel que
   $$q(\alpha_k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*} q(\alpha) \tag{1}$$
   avec
   $$q(\alpha) = f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

2. Montrer que α_k est correctement défini avec la relation (1) et qu'on a bien $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ si $x_k \neq x^*$.
3. Calculer $q'(\alpha)$. En déduire que $< \nabla f(x_{k+1}), \nabla f(x_k) >= 0$.
4. Montrer que
   $$\frac{\gamma}{2}||x_{k+1} - x_k||^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$$
   En déduire que $\lim_{k\to+\infty}(x_{k+1} - x_k) = 0$.
5. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.
6. Montrer que
   $$||\nabla f(x_k)||^2 \leq ||\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1})||^2$$
   En déduire que $\nabla f(x_k)$ tend vers 0.
7. Montrer que
   $$\gamma ||x_k - x^*||^2 \leq < \nabla f(x_k), x_k - x^* >$$
   puis montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.

   .