CC1 Optimisation numérique 2024-25 : corrigé

Ex 1)

1) On calcule successivement

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz+z+y \\ xz+z+x \\ xy+y+x \end{pmatrix}$$

et

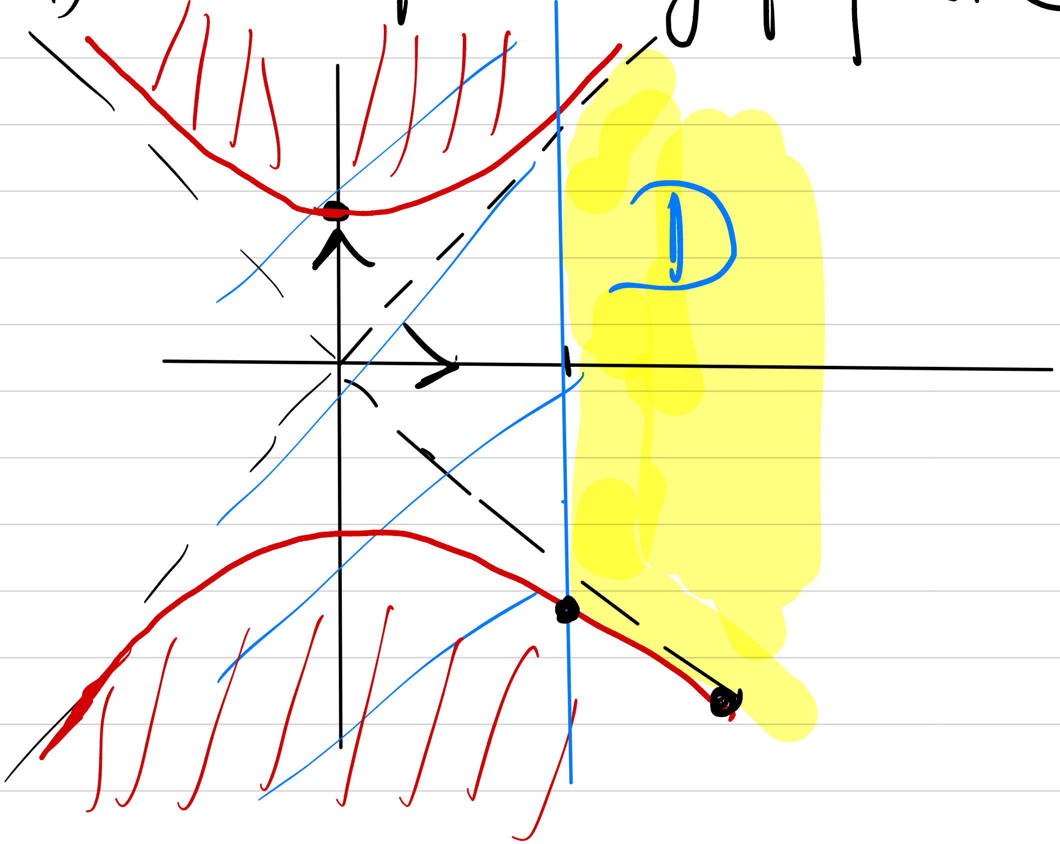
$$Hh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z+1 & y+1 \\ z+1 & 0 & x+1 \\ y+1 & x+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (avec multiplicité) sont telles que $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. Pour que la matrice soit semi-définie positive, il faut donc que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, soit $Hh(x,y,z)=0$, c'est à dire $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$

2) Si h possède un minimum en X^*, alors $\nabla h(X^*)=0$ et $Hh(X^*)$ est semi-définie positive. On a donc forcément $X^*=(-1,-1,-1)$ pour lequel : $\nabla h(X^*)=(-1,-1,-1)$, ce qui n'est pas possible.

Ex2)

1) On représente graphiquement D :



* D n'est pas convexe :

$(2,\sqrt{5})$ et $(3,\sqrt{10}) \in D$ mais

$\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}\right) \notin D$ car

$\frac{5}{4} + \frac{10}{4} + \frac{\sqrt{50}}{2} - \frac{25}{4}$

$= \frac{\sqrt{50}}{2} - \frac{10}{4} > 1$

(en effet $\sqrt{50} > \frac{14}{2} = 7$)

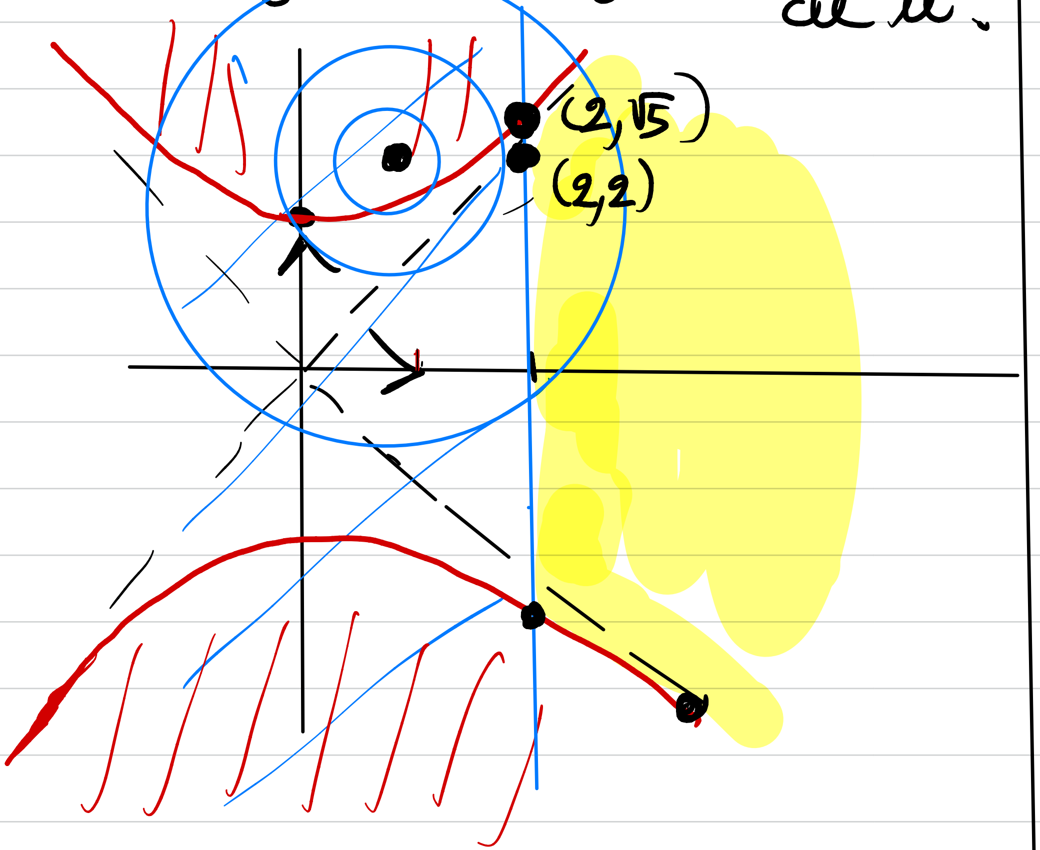
* D est fermé comme intersection de fermé (inégalités larges).

* D n'est pas borné car $(n,0) \in D$ pour tout $n \geq 2$.

2) La fonction u est coercive sur $\mathbb{R}^2$ et donc sur D (fermé).

u possède donc (au moins) un minimum sur D.

3) On rajoute les lignes de niveau de u :



Il s'agit de cercles concentriques en $(1,2)$; le premier de ces cercles qui intercepte D, passe en $(2,2)$ qui est donc le minimum de u sur D.

4) On a

$$\left.\begin{array}{l} c_1(x,y) = y^2 - x^2 - 1 \\ c_2(x,y) = 2 - x \end{array}\right\} \text{ d'où}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla c_1(x,y) = (-2x, 2y) \text{ et} \\ \nabla c_2(x,y) = (-1, 0) \end{array}\right.$$

Comme $(0,0) \notin D$ et qu'en $(2,\sqrt{5})$, $(2,-\sqrt{5})$, la famille $\{\nabla c_1, \nabla c_2\}$ est libre, on peut affirmer que tous les points de D sont qualifiés.

4

5) On note :

$$\mathcal{L}(x,y,\mu_1,\mu_2) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \mu_1(y^2-x^2-1) + \mu_2\boxed{(2-x)}$$

On écrit les conditions KKT vérifiées par un point de minimum (x,y) : il existe μ_1 et μ_2 tels que :

$$\begin{cases} 2(x-1) - 2\mu_1 x - \mu_2 = 0 \\ 2(y-2) + 2\mu_1 y = 0 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \\ y^2 - x^2 \leq 1 \, ; \, x \geq 2 \\ \mu_1(y^2-x^2-1) = \mu_2(2-x) = 0 \end{cases}$$

4 cas sont possibles :

* $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Dans ce cas, $x = 1$ ce qui est impossible

* $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$: on a :

$$\begin{cases} 2(x-1) - 2\mu_1 x = 0 & (1) \\ 2(y-2) + 2\mu_1 y = 0 & (2) \\ y^2 - x^2 = 1 \text{ et } x > 2 \end{cases}$$

Cela implique ($(1) * y + (2) * x$)

$$2y(x-1) + 2x(y-2) = 0$$

soit $2xy = y + 2x$ et

$$y = \frac{2x}{2x-1} = 1 + \frac{1}{2x-1}$$

On a donc $1 < y < 1 + \frac{1}{3}$

alors que $y^2 = 1 + x^2 \geq \sqrt{5}$

ce qui est absurde.

* $\mu_1 = 0$; $\mu_2 > 0$: on a :

$$\begin{cases} 2(x-1) - \mu_2 = 0 \\ 2(y-2) = 0 \\ y^2 - x^2 \leq 1 ; x = 2 \end{cases}$$

ce qui implique $\mu_2 = 2$; $y = 2$

Il s'agit d'une solution de KKT

* $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$: on a forcement $(x, y) = (2, \sqrt{5})$ ou $(2, -\sqrt{5})$

Par le premier cas, cela donne :

$$\begin{cases} 2 - 4\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 2(\sqrt{5} - 2) + 2\sqrt{5}\mu_1 = 0 \end{cases}$$

soit : $\mu_1 < 0$: absurde

Par le second cas, cela donne :

$$\begin{cases} 2 - 4\mu_1 - \mu_2 = 0 \\ 2(-\sqrt{5} - 2) = 2\sqrt{5}\mu_1 \end{cases}$$

soit $\mu_1 < 0$: pas de solution

Le minimum de u sur D est donc atteint en $(2, 2)$.

Ex3

a) On calcule

$$\nabla f_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y+1 \\ 2\alpha y + x \end{pmatrix}$$

et $$Hf_\alpha(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

on a Hf_α est semi-définie positive ssi $4\alpha - 1 > 0$ soit : $\alpha > 1/4$. Dans ce cas, f_α est strictement convexe.

Si $\alpha = 1/4$, les valeurs propres de H_f sont : 0 et $3/2$: f_α est convexe.

Lorsque $\alpha < 1/4$, $\det Hf_\alpha(x,y) < 0$ et f_α n'est pas convexe

* On suppose $\alpha \geq 1/4$. On écrit :

$$\mathcal{L}(x,y,\mu) = x^2 + \alpha y^2 + xy + x + \mu(x+y-1)$$

Les contraintes sont qualifiées. La condition KKT s'écrit :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 + \mu = 0 \\ 2\alpha y + x + \mu = 0 \\ x+y \leq 1,\ \mu \geq 0 \text{ et } \mu(x+y-1) = 0 \end{cases}$$

On suppose $\mu = 0$: on a alors

$$\left.\begin{matrix} 2x+y+1=0 \\ 2\alpha y + x = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (-4\alpha+1)y = -1 \\ x = -2\alpha y \end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\alpha}{1-4\alpha} \\ y = \dfrac{-1}{1-4\alpha} \end{cases} \quad (\alpha \neq 1/4)$$

, ce qui donne

$$x+y = \frac{1-2\alpha}{4\alpha-1} \leq 1 \text{ ssi } \alpha \geq 1/3$$

Dans ce cas, il s'agit de l'unique minimum de f_α sur $\mathbb{R}^2$ (f_α est convexe), donc sur C.

* Lorsque $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{3}$, on suppose $\mu > 0$: le système KKT s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+1+\mu=0 \\ 2\alpha y + x + \mu = 0 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{1}{\alpha} \\ y = \frac{1}{\alpha} \\ \mu = -3 + \frac{1}{\alpha} \end{array}\right.$$

(après calculs)

Il s'agit bien d'une solution du KKT car $\mu > 0$. De plus, comme Hf_α est toujours semi-définie positive, on peut montrer la réciproque, à savoir que la solution de KKT est un minimum de f_α sur C.

b) On remarque que :

$f(t, -2t) = (-1+4\alpha)t^2 + t \to -\infty$ quand $t \to +\infty$ alors que $t - 2t \leq 1$: f_α n'a donc pas de minimum.

Ex 4

1) On a par tout $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\gamma}{2}\|v\|^2 + \langle \nabla f(0), v \rangle + f(0) \leq f(v)$$

et ainsi :

$$\frac{\gamma}{2}\|v\|^2 - \|\nabla f(0)\| \cdot \|v\| + f(0) \leq f(v)$$

Ceci implique que f est coercive. Elle possède donc (au moins) un minimum. Comme f est strictement convexe, ce minimum est unique.

2) La fonction q est coercive sur $\mathbb{R}_+$; elle possède donc bien un minimum. De plus, si $x_k \neq x^*$, on a $\nabla f(x_k) \neq 0$ et $\nabla f(x_k)$ est donc une direction de descente.

On a donc $f(x_{k+1}) < f(x_k)$

3) On a

$$q'(\alpha) = \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \rangle$$

Comme q est minimale en α_k, $q'(\alpha_k) = 0$, ce qui implique que $\langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_{k+1}) \rangle = 0$

4) On applique la 1ère relation par $u = x_{k+1}$, $v = x_k$:

$$\frac{\gamma}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \langle \nabla f(x_{k+1}), x_{k+1} - x_k \rangle + f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

soit avec la question précédente :

$$\frac{\gamma}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$$

En sommant ces inégalités :

$$\frac{\gamma}{2} \sum_{k=0}^{N} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x_0) - f(x_{N+1})$$

Or, f est minorée (car coercive)

Ceci implique que la série

à termes positifs $\sum \|x_{k+1} - x_k\|^2$ est convergente. Son terme général tend donc vers 0 et ainsi :

$$\lim_{k \to +\infty} (x_{k+1} - x_k) = 0$$

5) Par l'absurde, si la suite n'est pas bornée, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_{\varphi(k)}\| = +\infty$$

Ceci implique $f(x_{\varphi(k)}) \to +\infty$ ce qui est absurde.

6) L'inégalité revient à montrer :

$$0 \leq \|\nabla f(x_{k+1})\|^2 + \underbrace{2 \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_{k+1}) \rangle}_{\geq 0}$$

qui est trivialement vraie.

On a donc :

$$\|\nabla f(x_{k+1})\|^2 \leq L^2 \underbrace{\|x_{k+1} - x_k\|^2}_{\to 0}$$

et $\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$

7) On applique la $1^{ère}$ inégalité à $u = x_k$, $v = x^*$:

$$\frac{\gamma}{2}\|x_k - x^*\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle + f(x_k) \leq f(x^*)$$

Soit

$$\frac{\gamma}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle + \underbrace{f(x^*) - f(x_k)}_{\leq 0}$$

soit le résultat annoncé.

7) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\frac{\gamma}{2}\|x_k - x^*\|^2 \leq \|\nabla f(x_k)\| \, \|x_{k+1} - x_k\|$$

soit

$$\frac{\gamma}{2}\|x_k - x^*\| \leq \underbrace{\|\nabla f(x_k)\|}_{\to 0}$$

et ainsi $\lim_{k \to +\infty} (x_{k+1} - x^*) = 0$