TD 1 Optimisation: introduction et rappels

Exercice 1 . On considère la fonction sur $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + b$$

où $Q \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\nabla f(x)$ et $Hfx)$.

Exercice 2. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

Calculer le modèle quadratique approché de f en $(1, 1)$.

Exercice 3

1. Tracer quelques lignes de niveau de la fonction $f(x, y) = x^2 y$
2. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ strictement convexe et ne possédant pas de point critique.
3. Soit $\beta \in]0, 1[$ et f une fonction C^1 et minorée. Montrer que si d est une direction de descente pour f en x, il existe $\alpha > 0$ tel que

   $$f(x + \alpha d) = f(x) + \beta\alpha < d, \nabla f(x) >$$

   On pourra commencer par une conjecture graphique.

Exercice 4

1. Représenter graphiquement quelques lignes de niveau de la fonction

   $$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2 + 1$$

   puis représenter pour un point sur une des lignes de niveau, le gradient en ce point et un exemple de direction de descente.
2. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d \in \mathbb{R}^n$ est tel que

   $$||\nabla f(x) + d|| \leq ||\nabla f(x)||$$

   Montrer que d est une direction de descente de f en x.
3. Soit f une fonction différentiable et <u>convexe</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x.

Exercice 5

1. En dimension 1, montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1, admet un minimum local strict en x qui est le seul point critique, alors c'est un point de minimum global.
2. Montrer que $f : (x, y) \to x^2(1 + y)^3 + y^2$ a un seul point critique, que c'est un minimum local strict mais pas un minimum global.
3. Existe -t-il une fonction $f : R^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée inférieurement, ayant un unique point critique qui soit un minimum local strict mais que la fonction n'admette pas de minimum global ?