# TD2 AGREG 2003: APPROXIMATION POLYNOMIALE

**1. (polynômes de Jackson)** On considère la famille de polynômes trigonométriques $(J_n)_{n\geq 2}$ définis de la manière suivante:

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad J_n(\theta) = c_n \prod_{k=1}^{n-2} (1 - \cos(\theta - \frac{(2k+1)\pi}{n}))$$

où $c_n > 0$ est caractérisé par $J_n(\frac{\pi}{n}) = \frac{1}{2}$

a) Montrer les deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} J_n(\theta - \frac{2k\pi}{n}) = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} J_n(\theta - \frac{2k\pi}{n})(1 - \cos(\theta - \frac{2k\pi}{n})) = 1 - \cos(\frac{\pi}{n}) \end{cases}$$

puis l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} J_n(\theta - \frac{2k\pi}{n}) |\cos\theta - \cos(\frac{2k\pi}{n})| \leq \frac{\pi}{n}$$

valables pour tout $\theta \in \mathbf{R}$ et $n \geq 2$.

b) Soit $f \in C([-1,1], \mathbf{R})$. On lui associe le polynôme trigonométrique suivant:

$$\phi_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\cos(\frac{2k\pi}{n})) J_n(\theta - \frac{2k\pi}{n})$$

Montrer qu'il existe $P_{n-2} \in \boldsymbol{P}_{n-2}$ (polynôme de Jackson associé à $f$ d'ordre $n-2$) tel que

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \phi_n(\theta) = P_{n-2}(\cos\theta)$$

et montrer que

$$||f - P_{n-2}||_{L^\infty([-1,1])} \leq 3\omega_f(\frac{2}{n})$$

où $\omega_f$ désigne le module de continuité de $f$.

---

**2. (courbes de Bézier)** A partir de la famille des polynômes de Bernstein:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad B_{i,n}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \quad (n \in \mathbf{N}, 0 \leq i \leq n)$$

on définit pour toute famille de points du plan $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ (appelés points de contrôle) la courbe paramétrée de Bézier ($t \in [0,1] \mapsto M(t) \in \mathbf{R}^2$) par:

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) A_i$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on construit également la famille de points $(A_{i,j}(t))_{0\leq j\leq n, j\leq i\leq n}$ par les relations

$$\begin{cases} A_{i,0}(t) = A_i \quad (0 \leq i \leq n) \\ A_{i,j}(t) = tA_{i,j-1}(t) + (1-t)A_{i-1,j-1}(t) \quad (1 \leq j \leq n, j \leq i \leq n) \end{cases}$$

a) Montrer que

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \quad , \forall i \in \{j, ..., n\}, \quad A_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{j} A_{i-j+k} B_{k,j}(t)$$

et en déduire

$$M(t) = A_{n,n}(t)$$

b) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}, \quad B'_{i,n} = n(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1})$$

et en déduire

$$M'(t) = n(A_{n,n-1}(t) - A_{n-1,n-1}(t))$$

c) Proposer un algorithme de construction géométrique d'une courbe de Bézier ainsi que de ses tangentes en chaque point (algorithme de Casteljau) et l'appliquer sur l'exemple suivant: $A_0 = (-1, 0), A_1 = (0, 1), A_2 = (1, 1), A_3 = (1, -1)$.

---

**3. (propriétés supplémentaires des polynômes orthogonaux)** On note $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la famille des polynômes orthogonaux et de norme unité associée à un poids quelconque $\omega$ sur $]a, b[$.

a) Montrer la formule de Darboux:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad x \neq y \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} P_i(x) P_i(y) = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(y) - P_n(x) P_{n+1}(y)}{x - y}$$

avec $\gamma_n > 0$ le coefficient dominant de $P_n$ puis en déduire

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P'_{n+1}(x) P_n(x) - P'_n(x) P_{n+1}(x) > 0$$

b) En notant $(x_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ les racines de $P_n$ (distinctes et dans $]a, b[$) rangées par ordre croissant, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall i \in \{1, ..., n\}, \quad x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}$$