TD : extraits du sujet Maths Générales 2017

$(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

Exercices préliminaires.

Matrices de rang 1

Vérifier qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe deux vecteurs non nuls $X \in \mathbf{K}^n$ et $Y \in (\mathbf{K}^m)^*$ tels que $A = XY$.
Cette écriture est-elle unique ?

Dual de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$

Pour un élément A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ on note f_A l'application de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui à une matrice M associe $f_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
Montrer que l'application qui à A associe f_A définit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ et $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}))^*$.

Matrices associées à une application linéaire donnée.

Soit u une application linéaire d'un espace E de dimension m dans un espace F de dimension n, et A un élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
À quelle condition existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = A$?

I Réduction de Jordan

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension strictement positive. Pour u endomorphisme de E, on note I_u l'idéal des polynômes de $\mathbf{K}[X]$ qui annulent u, et π_u un générateur unitaire de cet idéal qu'on rappelle être un polynôme minimal de u. On introduit de même π_M pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Vérifier l'égalité $\dim_{\mathbf{K}}(\mathbf{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.
2. Montrer que si u est nilpotent alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(u^p) = 0$.
3. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \mathrm{Tr}(u^p) = 0$. On écrit $\pi_u = X^k Q(X)$ avec $\mathrm{PGCD}(X, Q) = 1$. On pose $F = \mathrm{Ker}(u^k)$ et $G = \mathrm{Ker}(Q(u))$. On va montrer par l'absurde que $G = \{0\}$.
   (a) Montrer que $E = F \oplus G$ et que cette décomposition est une décomposition en sous-espaces stables par u.
   (b) On suppose G non réduit à $\{0\}$ et on note u_G l'endomorphisme de G induit par u. Montrer que $Q(u_G) = 0$ et en déduire qu'il existe $i > 0$ tel que les traces de u_G^i et u^i soient non nulles.
   (c) Conclure.
   [*Indication : on pourra étudier la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition proposée.*]

Si $\dim(E) = n$, on rappelle les définitions suivantes ; $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *cyclique* s'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E. Un sous-espace F non nul de E, stable par u, est dit u-cyclique (ou tout simplement cyclique s'il n'y a pas d'ambiguité) si $u_{|F}$ est cyclique.

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \ / \ uv = vu\}$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. Cet ensemble $\mathcal{C}(u)$ est appelé le *commutant de u*.

4. On va montrer que si un endomorphisme u de E est cyclique, alors $\mathbf{K}[u] = \mathcal{C}(u)$.
   On se donne donc u cyclique, $x_0 \in E$ tel que $(x_0, ..., u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E et un endomorphisme v vérifiant $uv = vu$.
   (a) Vérifier qu'il existe un polynôme P tel que $v(x_0) = P(u)(x_0)$.
   (b) En déduire l'égalité $v = P(u)$, puis conclure.
5. On suppose l'endomorphisme u diagonalisable. À quelle(s) condition(s) sur ses valeurs propres u est-il cyclique ?
6. On se donne $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice 2 avec $\dim(E) = 4$. On pose $C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C_2 & O \\ O & C_2 \end{pmatrix}$.
7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. On va établir un théorème de réduction de Jordan, énoncé ci-dessous, par récurrence sur $n = \dim(E)$:

   Si u est un endomorphisme nilpotent, alors il existe des sous-espaces $F_1, ..., F_k$ tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ et tels que les restrictions de u à chaque F_i soient cycliques.

   Le cas $n = 1$ est évident et on ne demande pas de le rédiger. Pour le passage des rangs $1, .., n-1$ au rang n, on va appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$.
   On écrit donc $\mathrm{Im}(u) = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} F_k$ où les sous-espaces F_k sont supposés cycliques. On choisit alors y_k tel que $F_k = \mathbf{K}[u](y_k)$ et on écrit $y_k = u(x_k)$ avec $x_k \in E$.

   Posons $G = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$, on note H un supplémentaire de G dans $\mathrm{Ker}(u)$.

   (a) Montrer que les sous-espaces cycliques de H sont les sous-espaces de dimension 1.
   (b) Montrer que $E = \overset{p}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathbf{K}[u](x_k) \oplus H$.
   (c) Conclure.