Algèbre linéaire : rappels et compléments (aspects théoriques)

Plan :

→ Espaces vectoriels
→ Morphismes
→ Bases
→ Matrices
→ Déterminant

Chap 1 programme officiel

(puis : réduction d'endomorphismes, ...)

Les aspects numériques :
→ Gauss, LU, etc
seront vus séparément

Chap 12

1) Espaces vectoriels

Def soit K corps commutatif ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ....) et E un ensemble muni de 2 lois :

($+$: loi de composition interne)

et ($\cdot$: " " externe de $K \times E$ dans E). On dit que $(E, +, \cdot)$ est un K espace vectoriel (K-ev) si

(i) $(E, +)$ est un groupe abélien (4 axiomes)

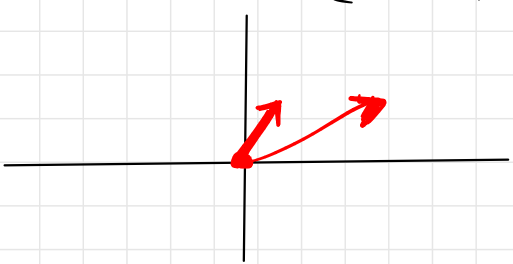
(ii) la loi $\cdot$ vérifie :

$\forall (\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E\times E$, on a :

$$\begin{cases} \to \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \\ \to (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.y \\ \to (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x) \\ \to 1.x = x \end{cases}$$

Exemples fondamentaux :

* $E = \mathbb{K}^n$ $(= \mathbb{K}\times\mathbb{K} \dots \times\mathbb{K})$



* $E = \mathbb{K}[X]$ (polynômes)
* $E = (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$
* $E = (\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), +, \cdot)$
* $E = (\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \cdot)$ (fonctions)
* $E = (\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ (suites)
* $E = (\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}, +, \cdot)$ (suites presque nulles)

Déf : soit $(E, +, \cdot)$ un Kev et $F \subset E$. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si $(F, +, \cdot)$ est un Kev.

Proposition : F est un sev de E ssi

* $0 \in F$ (en particulier $F \neq \emptyset$)
* $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K}\times F\times F$, $x + \lambda y \in F$

* Application : $(\mathbb{K}_n[X]^{(*)}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, comme sev de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$

(*) ensemble des polynômes de degré $\leq n$

* Somme directe, supplémentaire :

Def : E kev et $(E_i)_{i\in I}$ famille de sev de E. On note

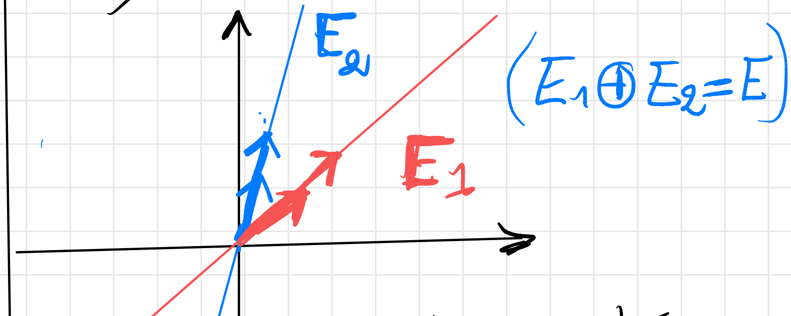
$$\sum_{i\in I} E_i = \left\{ \sum_{\substack{i\in I \\ \text{famille finie}}} \alpha_i \;,\; \alpha_i \in E_i \right\}$$

Il s'agit d'un sev de E. On dit que la somme est directe si

$$\sum_{i\in I,\ \text{finie}} x_i = 0 \iff \alpha_i = 0 \ \forall i \in I$$

et on note alors

$$\sum_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i$$



On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E ssi

$$E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 = E$$

Proposition :

* $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$ ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

* $E_1+E_2+E_3 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$
ssi $E_1 \cap (E_2+E_3) = \{0\}$ et
$E_2 \cap (E_1+E_3) = \{0\}$

Exemple : un supplémentaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ est par exemple :

$$\left\{ P \in \mathbb{K}[X],\ P = X^{n+1}Q,\ Q \in K[X] \right\}$$

Exercices

* E_1, E_2 sev de E. Si $E_1 \cup E_2$ est un sev, alors $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$ (*) absurde
* si K est infini, et $E_1, \dots E_n$ sev stricts de E, alors $E_1 \cup E_2 \dots \cup E_n \neq E$
* Contre-exemple de la proposition précédente si $\mathbb{K}$ est fini. ($E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$) (à faire) ($= \{0, 1, X, 1+X\}$)

($X \equiv X^2$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$)

2) Morphismes entre espaces vectoriels

Def : E et F Kev. et $f : E \to F$.
On dit que f est un morphisme de E dans F ssi

$\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E$

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F.

On parle d'endo (resp. iso) morphisme si de plus $F = E$ (resp. f bijectif)

Proposition : si f isomorphisme, alors f^{-1} est également un (iso) morphisme.

Def : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(x),\ x \in E\}$$

Il s'agit de sev de E (resp. F).

Un exemple classique de morphisme avec un e.v. quotient :

Def : soit E Kev et F sev de E.

On appelle espace quotient, noté E/F, l'ensemble de parties de E du type $x + F$ (avec $x \in E$).

Il s'agit d'un ev avec la loi

$$(x + F) + (y + F) = (x + y) + F$$

et la loi externe

$$\lambda (x + F) = \lambda x + F$$

On peut construire le morphisme naturel entre E et E/F :

$$\Pi \left(\begin{array}{ccc} E & \to & E/F \\ x & \mapsto & x+F \end{array} \right)$$

Ce morphisme est surjectif, non injectif (si $F \neq \{0\}$).

On peut "factoriser" certains morphismes avec un espace quotient :

Proposition : $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et F sev de E.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi"'] & G \\ E/F \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}(E/F, G)$ tq $\tilde{f} \circ \Pi = f$ si et seulement si

$F \subset \operatorname{Ker} f$.

Si $F = \operatorname{Ker} f$, alors $\tilde{f}$ est un isomorphisme de $E/\operatorname{Ker} f$ dans $\operatorname{Im} f$.

("théorème du rang")

preuve :

* si $\tilde{f}$ existe, alors $F \subset \operatorname{Ker} f$: soit $x \in F$, alors $f(x) = \tilde{f} \circ \Pi(x)$
$= \tilde{f}(0) = 0$
(car $0_{E/F} = F$ et $\tilde{f}$ morphisme)
* si $F \subset \operatorname{Ker} f$. On définit $\tilde{f} : E/F \to G$

avec $\tilde{f}(x+F) = f(x)$
(si $x \in E$)

Il faut vérifier :

→ la cohérence de la définition :

si $x' + F = x + F$, alors

$f(x) = f(x')$ (vrai car :

$x' = x + z$ avec $z \in F \subset \ker f$)

→ $\tilde{f}$ linéaire :

$\tilde{f}(\lambda(x+F)+(y+F)) = \tilde{f}(\lambda x+y)+F)$

$= f(\lambda x + y)$

et $\lambda\tilde{f}(x+F) + \tilde{f}(y+F) = \lambda f(x) + f(y)$

ok car f linéaire. //

→ $\tilde{f} \circ \Pi = f$:

$\tilde{f} \circ \Pi(x) = \tilde{f}(x+F) = f(x)$ //

(reste à faire)

3) Bases et dimension

Def : soit $\mathcal{E} = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E, K ev.

On dit que $\mathcal{E}$ est libre ssi

$\sum_{\substack{i \in I \\ \text{finie}}} \lambda_i x_i = 0 \iff \lambda_i = 0, \forall i \in I.$

On dit que $\mathcal{E}$ est génératrice si $\forall x \in E$

il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ tq $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = x$

Exemple :

* La famille $\{x \mapsto e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (*) exo
* La famille $\{X^k, k \in \mathbb{N}\}$ est génératrice par $E = \mathbb{K}[X]$.
* La famille $\{(0, \dots, 0, \underset{i}{\underset{\uparrow}{1}}, 0 \dots 0), i \in \mathbb{N}\}$ est génératrice par $E = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, mais pas par $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (toujours libre)

Def : $\mathcal{E} = (x_i)_{i \in I}$ est une base de E kev, ssi $\mathcal{E}$ est libre et génératrice par $\mathcal{E}$, c'est à dire : $\forall x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$$

On peut montrer les résultats fondamentaux suivants :

Théorème : un espace vectoriel possède toujours une base. Toutes ces bases possèdent le même cardinal (éventuellement infini). La dimension de E est égale alors au cardinal d'une de ces bases.

Ce résultat repose sur le théorème de la base incomplète :

Théorème : si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}' \subset E$, $\mathcal{E}$ libre, $\mathcal{E}'$ génératrice, alors, il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathcal{E} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{E}'$

Quelques exemples :

* $E = \mathbb{K}^n$, $\mathcal{B} = \{(0, \dots, \underset{i}{1}, 0, 0)\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ base (canonique) de E.

Ainsi, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

* $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$

* $E = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ possède une base de cardinal dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$).

* $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ne possède pas de base de cardinal dénombrable car $\mathcal{E} = \{n \longmapsto e^{\lambda n}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de cardinal non dénombrable.

* $E = \mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ ev de dimension non dénombrable.

* $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $(\dim E).\dim(F)$ si E et F sont de dimension finie.

* Si E est de dimension finie, alors
$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$$

* $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$

* $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

Quelques corollaire

Proposition : $f : E \to F$ linéaire avec E de dimension finie. Alors
$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f}$$

En particulier, si $\dim E = \dim F$

f bijective $\iff \operatorname{Ker} f = \{0\}$

$\iff \operatorname{Im} f = F$

Proposition (Grassman)

E_1, E_2 sev de E, alors

$$\boxed{\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)} \quad (\star)$$

E_1, E_2, E_3 sev de E :

$$\dim(E_1 + E_2 + E_3) = \dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim(E_1 \cap E_2) - \dim(E_1 \cap E_3) - \dim(E_2 \cap E_3) + \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$(\star)$ considérer :

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & E_1 + E_2 \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \right)$$