Algèbre linéaire (suite) : matrices, rang, trace, déterminant (aspects théoriques)

1) Espaces vectoriels de dimension finie : introduction des matrices

Def : on définit l'ensemble des matrices de taille $p \times q$, sur un corps $\mathbb{K}$:

$A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ ssi

$$A = \textcircled{p}\updownarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}}_{\textcircled{q}} \quad (a_{ij} \in \mathbb{K}) \quad (= [a_{ij}])$$

et on le munit de la structure

$$\begin{cases} + \ (\text{lci}) : A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \\ \bullet \ (\text{lce}) : \lambda . A = [\lambda a_{ij}] \end{cases}$$

Ainsi construit, $(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel de dimension $p \cdot q$ (une base est formée par les matrices élémentaires $E_{k,l} = [\delta_{i,k} \delta_{j,l}]$)

On ajoute une loi multiplicative à cet ensemble : si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,l}(\mathbb{K})$, $C = A * B$

est une matrice de $\mathcal{M}_{p,\ell}(\mathbb{K})$ de terme général :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$

On montre que si $p = q = n$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, *)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre :

- $\rightarrow$ $A*(B*C) = (A*B)*C$
- $\rightarrow$ $A*I_n = I_n*A = A$
- $\rightarrow$ $A*(B+C) = A*B + A*C$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, *)$ est un anneau non commutatif).

Déf : transposée de A ($^tA \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$)

Déf : on note $GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$((GL_n(\mathbb{K}), *)$ groupe non commutatif$)$

Lien avec les morphismes entre espaces vectoriels de dimension finie :

Soit E $\mathbb{K}$-ev de dimension q (base : e)
E' " " p (base : e')
et $f \in \mathcal{L}(E, E')$. On associe à f la matrice

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_q) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow e'_1 \\ \\ \leftarrow e'_p \end{array} \end{array}$$

. On la

noté $\mathrm{Mat}(f)_{e,e'}$ //

L'application :

$$\varphi : \left(\begin{array}{l} \mathcal{L}(E,E') \longrightarrow \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ \quad f \longmapsto \mathrm{Mat}(f)_{e,e'} \end{array}\right)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

De plus

$$\mathrm{Mat}(f\circ g)_{e,e''} = \mathrm{Mat}(f)_{e',e''} * \mathrm{Mat}(g)_{e,e'} \quad (*)$$

EXO

Cas particulier : si $E = E'$, $(p=q=n)$ et $f = Id$, on note

$$P_{e,e'} = \mathrm{Mat}(Id)_{e',e} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & \cdots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{matrix}$$

qu'on appelle matrice de passage de e vers e'.

On a les propriétés suivantes :

- $P_{e,e'} \in GL_n(\mathbb{K})$ $(P_{e,e'}^{-1} = P_{e',e})$
- $P_{e,e''} = P_{e,e'} \cdot P_{e',e''}$
- si $x = \sum x_i e_i = \sum x'_i e'_i$, alors (changement de base)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{e,e'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

("anciennes coordonnées en fonction des nouvelles")

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$,

$$\boxed{\mathrm{Mat}(f)_e = P_{e,e'}\, \mathrm{Mat}(f)_{e'}\, P_{e,e'}^{-1}}$$

2) Rang et Trace d'une matrice

Def : si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on appelle rang des lignes de A, la dimension dans $\mathbb{K}^q$, de l'espace vectoriel engendré par les lignes de A (note $r_L(A)$). Idem par $r_C(A)$.

On a la proposition suivante :

Proposition :

$$r_L(A) = \text{Min}\{r \in \mathbb{N}^*, \exists B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \text{ tq } A = BC\}$$

et $r_L(A) = r_C(A)$.

On note cette valeur le rang de A.

On a les propriétés suivantes :

- $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA)$
- $\text{rg}(AB) \leq \text{Min}(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$
- $\text{rg}(A) = p \Longleftrightarrow$ A inversible à droite : $B . A = I_q$ (idem à gauche).
- si $p = q = n$, $\text{rg}(A) = n \Longleftrightarrow$ A inversible.
- si $A = (\text{Mat} f)_{e,e'}$, alors $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im} f)$

On peut classer les matrices à partir de leur rang :

Proposition : si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_q(\mathbb{K})$ tq

$$A = P \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{(\text{taille } p \times q)} Q$$

(A et $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ sont équivalentes)

On peut également caractériser le rang d'une matrice à partir de matrices extraites :

Def si $I \subset [\![1,p]\!]$ et $J \subset [\![1,q]\!]$

$$A_{I,J} = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\right\}}_{\uparrow \text{ colonnes } J} \leftarrow \text{lignes } I$$

$$= [a_{ij}]_{i \in I,\, j \in J}$$

(matrice extraite de A).

On a la caractérisation :

Proposition : $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $r = rg(A)$ est la taille de la plus grande matrice extraite carrée qui soit inversible.

Def : si $p = q = n$, alors la trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est égale à $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

On a :

Proposition : * $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

* La trace est un invariant de similitude : $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$

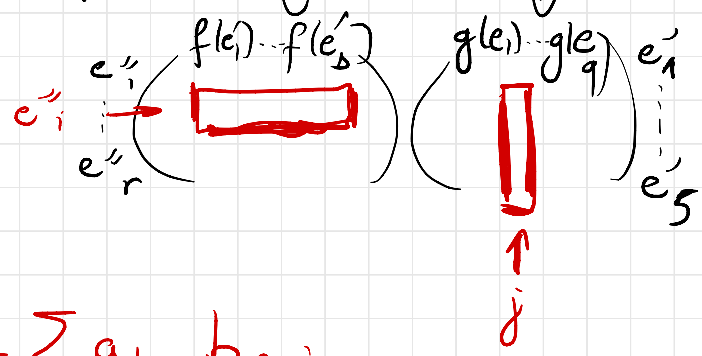
(on peut alors définir la trace de l'endomorphisme f :

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Mat}(f)_e)$$

Exercice : si p est projecteur ($p \circ p = p$), $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$

Retour exercice :

$$\underbrace{\mathrm{Mat}(f\circ g)}_{r\times q}{}_{\underbrace{e}_{q},\underbrace{e''}_{r}} = \mathrm{Mat}(f)_{e',e''} * \mathrm{Mat}(g)_{e e'}$$



$$c_{ij} = \sum \underbrace{a_{ik}}_{(f(e'_k))_i} \underbrace{b_{kj}}_{(g(e_j))_k}$$

$$= (f\circ g(e_j))_i$$

3) Déterminant d'une matrice carrée

Ici $p = q = n$.

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée, on doit d'abord définir la signature d'une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$:

$$\left(\sigma : \left(\begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ i & \mapsto & \sigma(i) \end{array}\right) \text{ bijection}\right)$$

On note $\varepsilon(\sigma) = (-1)^s$ où s désigne le nombre d'échanges d'ordre $i<j \to \sigma(i) > \sigma(j)$

(exemple si $\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$)

$$\varepsilon(\sigma) = -1$$

On a alors :

Def $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A l'élément de $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}}$$

$$\left(= |A| \text{ ou } \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

* Cas particuliers simples :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + bfg - gec - dbi - afh$$

* Si A est triangulaire supérieure,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Une méthode récursive de calcul est possible :

Proposition (dvpt lignes / colonnes)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = a_{11} \det(A^{1,1}) - a_{1,2} \det(A^{1,2}) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{1,n} \det(A^{1,n})$$

où

$$A^{1,j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \\ & & a_{n,j} & & \end{pmatrix}$$

(matrice $(n-1)\times(n-1)$ extraite de A)

(extension possible à d'autres lignes ou colonnes : attention à l'alternance de signes)

(preuve : exo ou références au choix)

On a aussi :

Proposition : $\det(A) = \det({}^tA)$ (car $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$)

On a enfin la relation fondamentale suivante :

Théorème : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

Ce théorème peut se démontrer à partir d'un Lemme d'algèbre multilinéaire :

Lemme : soit $D : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

tq (pour tous k et j)

$$D(C_1, \dots C_k + \lambda D_k, C_{k+1}, \dots C_n) = D(C) + \lambda D(C_1, \dots, D_k, C_{k+1}, \dots C_n)$$

et

$$D(C_1, \dots C_{j-1}, 0, C_{j+1}, \dots C_n) = 0$$

alors $D(C) = D(I_n).\det(C)$ pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(forme multilinéaire alternée)

(preuve : exercice)

Le théorème peut se déduire du Lemme en considérant :

$$D : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ C & \mapsto & \det(AC) \end{pmatrix}$$

* Le déterminant est également utilisé pour résoudre des systèmes linéaires carrés. <(*) paragraphe suivant> Il permet d'obtenir aussi une caractérisa-

-tion des matrices inversibles :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

($\Longrightarrow$: avec $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\Longleftarrow$: avec comatrice)

Enfin, le déterminant sera utilisé par la recherche de valeurs propres (polynôme caractéristique).

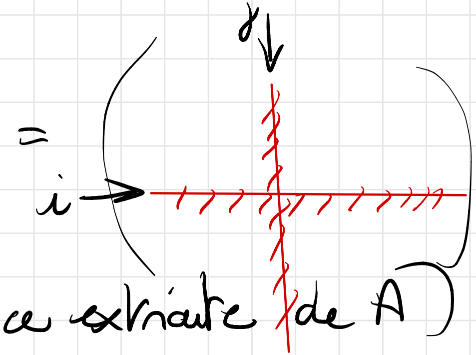
4) Comatrice et méthode de Cramer

Def : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (valable aussi sur un anneau)

on appelle comatrice de A, notée $\text{com}(A)$, la matrice de terme général

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) \quad \text{où}$$

$A^{ij} =$



(matrice extraite de A)

On a le résultat suivant :

Proposition (valable aussi sur un anneau)

$$A.{}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A).A = \det(A).I_n$$

(preuve : dvpt ligne colonne)

Corollaire : si $A \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$* \quad \boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{com}(A)}$$

(en particulier com(A) est polynomial en A).

* la solution du système

$$AX = Y \quad (\text{où } Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$$

s'exprime comme :

$$\alpha_k = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{\overset{k}{\downarrow}}{y_1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & y_n & & a_{n,1} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Quelques exercices classiques

Ex1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$

alors A est inversible (matrice à diagonale strictement dominante)
(variante : voir TD 1)

Ex2 déterminant de Vandermonde :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \\ x_0^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

Solution Ex1 :

On montre que

$$\underset{\displaystyle \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX = 0\}}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{Ker}(A)}} = \{0\}$$

soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tq

$AX = 0$. On suppose, par l'absurde, $X \neq 0$, soit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tq

$|x_{i_0}| = \underset{i \in [\![1, n]\!]}{\mathrm{Max}} |x_i|$. On a $x_{i_0} \neq 0$
(car $X \neq 0$).

On a

$$a_{i_0,1} x_1 + \cdots + a_{i_0,n} x_n = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} a_{i_0,j} x_j$$

$$\Longrightarrow |a_{i_0,i_0}| |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}| |x_j|$$

puis

$$|a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}||x_{i_0}|$$

Comme $|x_{i_0}| \neq 0$, on a

$$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

ce qui est absurde avec l'hypothèse.

//

Solution Ex2 :

preuve variationnelle en remplaçant dans la dernière colonne x_n par x.

(+ récurrence)