Séance 15 : recherche numérique de valeurs/vecteurs propres. Applications

Textes cibles (2024)

→ T1 : la matrice de Google
→ T14 : le modèle de Leontieff
(méthode de la puissance)

Objectif : construire des méthodes numériques par la recherche de valeurs/vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il s'agira dans tous les cas de méthodes approchées. En effet, ce problème contient le problème de la recherche de racines d'un polynôme (via la matrice compagnon).
En termes de conditionnement, il existe également des matrices mal conditionnées par ce problème, mais elles diffèrent des matrices mal conditionnées par le problème de la résolution de systèmes linéaires.

* Il existe de multiples méthodes, toutes applicables dans un contexte particulier :

→ Méthode de Jacobi
(matrices symétriques : tout le spectre
(+ éventuellement : les vecteurs propres))

→ Méthode QR
(famille large de matrices diagonalisables
: tout le spectre)

→ Méthode Givens-Householder
(matrices symétriques : une partie du spectre)

→ Méthode de la puissance
(famille large de matrices diagonalisables :
valeur propre / vecteurs propres)

(par détails sur Jacobi, QR, Givens-Householder : voir poly ou [Ciarlet] : "Intro à l'analyse numérique matricielle")

1) Conditionnement du problème

On s'intéresse au conditionnement du problème de recherche de valeurs propres complexes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10^{-4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a par polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = X^4 - 10^{-4}$$

(matrice compagnon)

et donc par valeurs propres

$$\lambda_i = 10^{-1} e^{i\pi/2}$$

$(0 \leq i \leq 3)$

alors que

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a par valeurs propres : $\lambda = 0$ (amplification de 10^4 sur le résultat des valeurs propres).

On adopte la définition suivante (à justifier) du conditionnement d'une matrice A par le problème de la recherche de ses valeurs propres :

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On note $\Gamma(A)$ le réel :

$$\boxed{\Gamma(A) = \operatorname{Inf}(\operatorname{cond}(P)) \quad (P \text{ passage} : P^{-1}AP \text{ diagonale})}$$

où $\text{cond}(P) = |||P|||\,.\,|||P^{-1}|||$ (conditionnement par la résolution du systèmes linéaires).

Remarques :

* $\Gamma(A) \geq 1$ (car $\text{cond}(P) \geq 1$)
* $\Gamma_2(A) = 1$ si A symétrique (car dans ce cas $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\text{cond}_2(P) = 1$)

On a le résultat suivant justifiant la définition de $\Gamma(A)$:

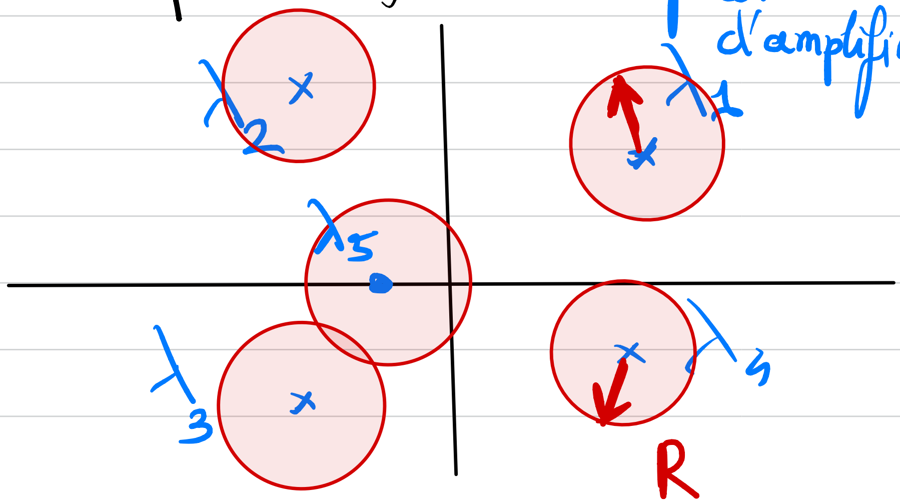
Théorème : soit A diagonalisable de v.p. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et soit $|||.|||$ une norme subordonnée tq $|||\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)||| = \underset{1 \leq i \leq n}{\text{Max}} |\lambda_i|$

Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $Sp_{\mathbb{C}}(A') \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda_i, \underbrace{\Gamma(A)\,|||A'-A|||}_{R})$

facteur d'amplification

Graphiquement, on a :

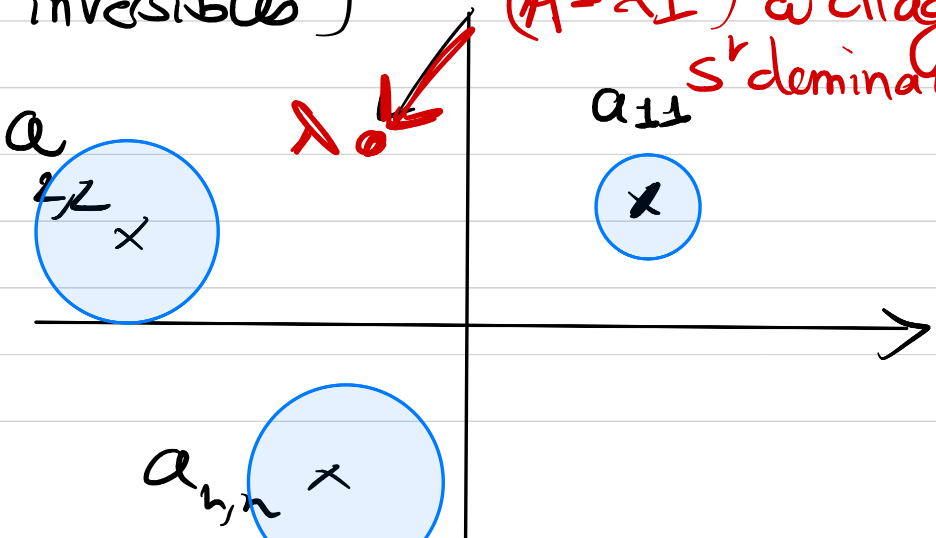


Ce résultat est à ne pas confondre avec les disques de Gershgorin :
si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\boxed{Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\Big(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\Big)}$$

(provient du résultat sur les matrices à diagonale strictement dominante $\Rightarrow$ inversibles)

$(A-\lambda I)$ à diag s^t dominante



Preuve du théorème :

soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A')$. On note
$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)$

On a

$$P^{-1}(A' - \lambda I)P = D + P^{-1}(A' - A)P$$

(P tel que $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$)

soit :

$$\underbrace{P^{-1}}_{\text{inv.}}\underbrace{(A' - \lambda I)}_{\text{singulière}}P = \underbrace{D}_{\text{inv.}}(I + \underbrace{D^{-1}P^{-1}(A' - A)P}_{B})$$

On en déduit que B est singulière.

En particulier $|||I - B||| \geq 1$

(sinon $I - (I - B)$ inversible)

On a donc :

$$|||I - B||| = |||D^{-1}P^{-1}(A' - A)P|||$$
$$\leq |||D^{-1}|||.\mathrm{cond}(P)\,|||A' - A|||$$

soit :

$$1 \leq |||D^{-1}|||\,\mathrm{cond}(P)\,|||A' - A|||$$

soit :

$$\underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}}\left(|\lambda - \lambda_i|\right) \leq \mathrm{cond}(P)\,|||A' - A|||$$
$$\leq \Gamma(A)\,|||A' - A|||$$

On remarque ainsi que la matrice de Hilbert est parfaitement conditionnée par la recherche de ses valeurs propres !

3) Méthode de la puissance (et de la puissance inverse)

L'objectif de cette méthode est d'approcher la plus grande valeur propre d'une matrice diagonalisable (en module) et aussi un vecteur propre associé.

Le cas théorique idéal (assez fréquent dans la pratique) correspond au cas d'une valeur propre strictement dominante ($|\lambda_1| > |\lambda_i|$, $i \geq 2$) et simple par laquel il existe un résultat théorique (théorème de Perron-Frobénius). Celui-ci est rappelé dans le texte 14 - Léontieff :

Théorème : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients ≥ 0. Alors $\rho(M)$ est une valeur propre de M et il existe un vecteur propre x à coordonnées toutes positives.

Sous certaines hypothèses supplémentaires (par exemple $M > 0$), cette valeur propre est simple (voir texte 1 - Google)

La méthode de la puissance est définie et justifiée par le théorème suivant :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de valeurs propres $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \ldots \geq |\lambda_n|$

On construit la suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{C}^n$:

* $r_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \bigoplus_{i=2}^{n} E_{\lambda_i}$ ($\|r_0\| = 1$)

* $\begin{cases} q_{k+1} = A r_k \text{ et} \\ r_{k+1} = \dfrac{q_{k+1}}{\|q_{k+1}\|} \end{cases}$

Alors on a

$$\boxed{\frac{|\lambda_1|^k}{(\lambda_1)^k} r_k \longrightarrow r \text{ vecteur}}$$

propre de A associé à λ_1

et $\langle r_k, A r_k \rangle \to \dfrac{|\lambda_1|^2}{\lambda_1}$

probabilité 1

preuve : comme A est diagonalisable, on a

$$r_0 = \underbrace{\tilde{u}}_{\in E_{\lambda_1}} + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{u_i}_{\in E_{\lambda_i}}, \quad \tilde{u} \neq 0$$

On a :

$$q_1 = A r_0 = \lambda_1 \tilde{u} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i$$

et

$$r_1 = \frac{\lambda_1 \tilde{u} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i u_i}{\| \quad '' \quad \|}$$

Soit :

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \, \frac{\tilde{u} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_1} u_i}{\| \tilde{u} + \cdots \|}$$

$$\left| \; \right| < 1$$

On peut facilement montrer alors que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} r_k = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = r$$

(vecteur propre de A par λ_1)

et

$$\langle A r_k , r_k \rangle \to \frac{|\lambda_1|^2}{\lambda_1}$$

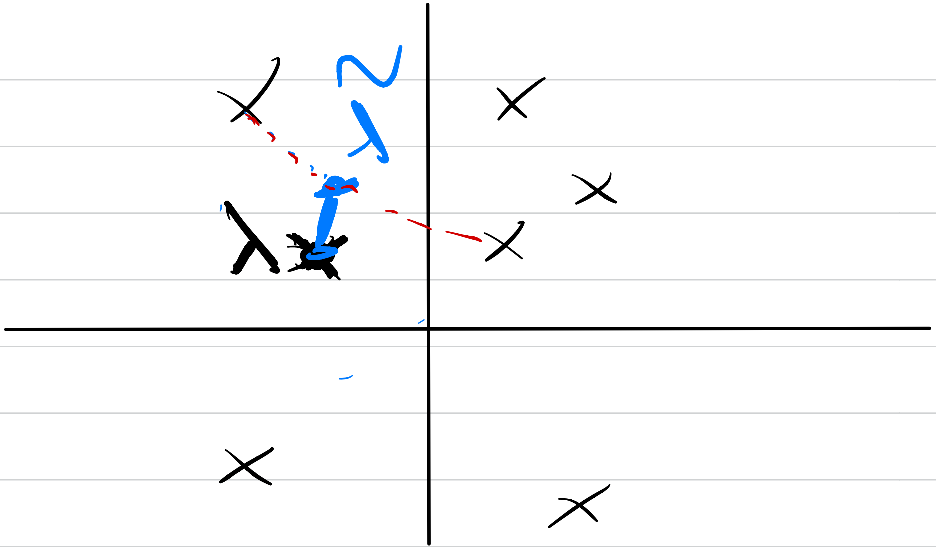
Il existe un extension à cette méthode appelée puissance inverse.

Celle-ci permet de rechercher des valeurs propres / vecteurs propres à l'« intérieur » du spectre de A

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ dont une valeur approchée $\tilde{\lambda}$ est supposée connue :

$$|\tilde{\lambda} - \lambda| < \min_{\mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{\lambda\}} |\tilde{\lambda} - \mu|$$

($\tilde{\lambda}$ est plus proche de λ que de n'importe quelle autre valeur propre)



Alors la suite :

* $u_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu$

* $u_{k+1} = \dfrac{(A - \tilde{\lambda} I)^{-1} u_k}{\| (A - \tilde{\lambda} I)^{-1} u_k \|}$

est tel que :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^k}{|\lambda - \tilde{\lambda}|^k} u_k = q \text{ où } q :$$

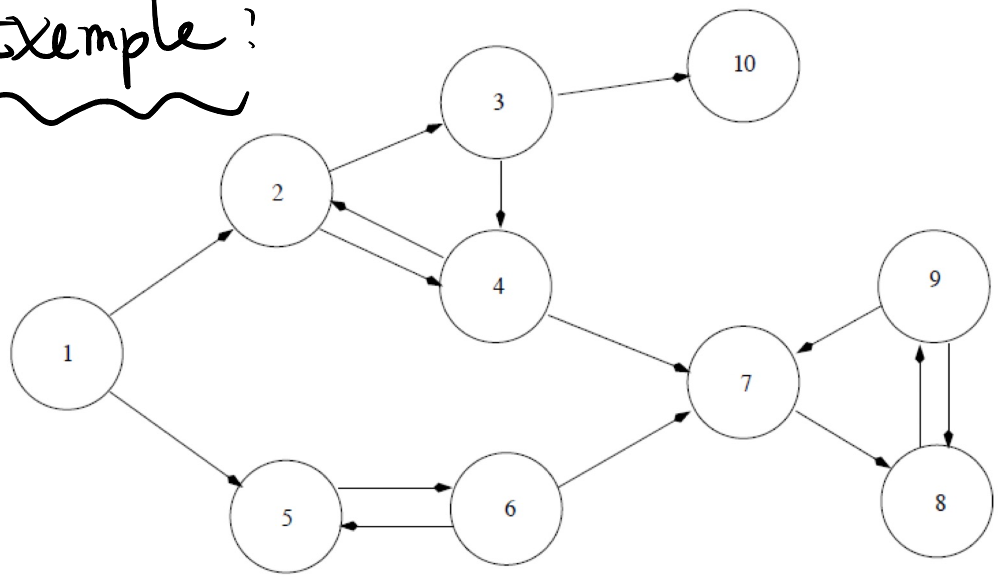
vecteur propre de A par la valeur propre λ.

(simple corollaire de la méthode de la puissance appliqué à $(A - \tilde{\lambda} Id)^{-1}$)

4) Application à l'algorithme Page Rank de Google

(basé sur texte 1)

Exemple :



L'objectif est de classer la pertinence des $n=10$ sites. Par cela on construit d'abord la matrice de connectivité :

$$C = [c_{ij}] \text{ telle que}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ pointe vers } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qu'on "normalise" avec

$$N_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}$$

(nbre de liens du site j) ;

$$Q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}/N_j & \text{si } N_j \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} = 1 \text{ si } N_j \neq 0 \right)$$

On complète les colonnes nulles avec un coefficient uniforme $1/n$

$$\rightarrow L_{ij} = \begin{cases} Q_{ij} & \text{si } N_j \neq 0 \\ 1/n & \text{sinon} \end{cases}$$

A ce stade, $\underline{P}$ est une matrice stochastique :

$$P_{ij} > 0 \text{ et } \sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1.$$

Elle possède $\lambda = 1$ comme plus grande valeur propre.

Pour classer les pages par ordre de pertinence, on définit leur score r_j tel que :

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \, r_j$$

poids du lien $j \to i$

score pertinence page j

soit exactement :

$$\underline{P}\, r = r$$

(r vecteur propre de $\underline{P}$ pour la valeur propre 1).

Afin que l'espace propre associé soit de dimension 1, on transforme légèrement $\underline{P}$ en :

$$A = \alpha \underline{P} + (1-\alpha) \underbrace{\begin{pmatrix} 1/n & \cdots & 1/n \\ \vdots & & \vdots \\ 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}}_{\text{graphe complet}}$$

$$(\alpha \in]0,1[)$$

Cela permet de mieux "séparer" la valeur propre 1 des autres valeurs propres (de module inférieur à α).

On applique alors la méthode de la puissance à A pour calculer le vecteur r (qui permet de classer les sites par pertinence).