Séance 7 : réduction d'endomorphismes ; aspect théoriques

Remarque : les aspects numériques (recherche numérique de valeurs propres et vecteurs propres) seront vus ultérieurement.

1) Définition et propriétés

Ici E est un $\mathbb{K}$-ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en général) de dimension finie.

Def : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E \setminus \{0\}$.
On dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si $u(x) = \lambda x$.
On note $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.
Dans le cas matriciel, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on dit que $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ si $AX = \lambda X$.

On alternera dans les définitions et les preuves entre ces 2 approches

Def : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A)$$

(coef dominant de χ_A : X^n)

qu'on appelle polynôme caractéristique de A.

On a le résultat suivant :

Proposition : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On a

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$$

(on en déduit en particulier que A possède au plus n valeurs propres)

preuve :

$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \iff A - \lambda I_n$ non bijectif

$\iff \chi_A(\lambda) = 0$

On a également le résultat suivant :

Proposition : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

preuve :

Soit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} XI_n & -A \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \text{ et } N = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline B & XI_n \end{array}\right)$$

On a

$$MN = \left(\begin{array}{c|c} XI_n - AB & 0 \\ \hline B & XI_n \end{array}\right)$$

et

$$NM = \left(\begin{array}{c|c} XI_n & 0 \\ \hline XB & XI_n - BA \end{array}\right)$$

Or, $\det(MN) = \det(NM)$, ce qui implique :

$$\det(XI_n - AB)\underbrace{\det(XI_n)}_{X^n} = \underbrace{\det(XI_n)}_{X^n}\det(XI_n - BA)$$

et ainsi $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

(autre preuve possible : $AB = B^{-1}(BA)B$ si B inversible

$\oplus$ argument de densité de $GL_n(\mathbb{K})$)

En particulier, si $P \in GL_n(\mathbb{K})$,

$$\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$$

Ainsi, on peut définir à bon droit

le polynôme caractéristique d'un endomorphisme :

Def soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note

$$\chi_u = \chi_A \text{ où } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

(avec $\mathcal{B}$ base quelconque de E)

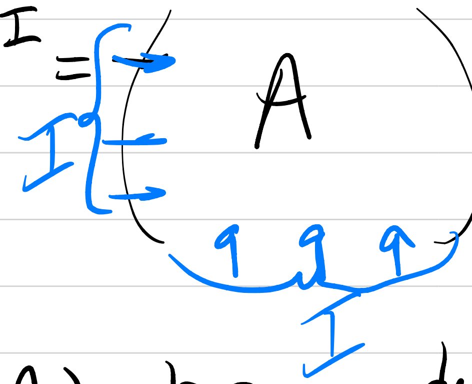
Remarques et exemples :

1) si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \dots s_i(-1)^i X^{n-i} + (-1)^n \det(A)$$

où $s_i = \displaystyle\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ \mathrm{card}\, I = i}} \det(A^I)$

avec A^I matrice extraite de A : $A^I =$



($s_1 = \mathrm{Tr}(A)$ et $s_n = \det(A)$)

2) Si A est triangulaire :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)}$$

(et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$)

2) Si A est une matrice compagnon :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

alors

$$\chi_C(X) = X^n - c_{n-1}X^{n-1} - \cdots - c_0$$

(preuve : recurrence et dvpt 1ère ligne)

Exercice : si

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$\chi_V(X) = T_{n+1}\left(X/2\right)$ où T_n n-ème polynôme de Tchebychev ($\sin(n\theta) = \sin\theta \, T_n(\cos\theta)$)

(à faire).

On définit à présent l'espace propre associé à une valeur propre :

def : si $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)$, alors on note

$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id)$

l'espace propre associé à λ.

(idem $E_\lambda(A)$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)

On a la propriété suivante :

Proposition Si $\lambda_1, \dots \lambda_p$ valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$ (somme directe).

preuve : récurrence sur p.

On peut alors définir le caractère diagonalisable d'un endomorphisme ou d'une matrice.

Def * si $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est diagonalisable s'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_p$ tels que

$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$

(autrement dit : E possède une base formée de vecteurs propres de u)

* Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A est diagonalisable si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale tels que $A = PDP^{-1}$

→ Lien entre les 2 définitions :

u diagonalisable ($\mathcal{B}$ base de E)

$\Updownarrow$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ diagonalisable

On définit enfin la notion de matrice trigonalisable :

Def : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire, tels que

$$A = PTP^{-1}$$

2) Polynômes d'endomorphisme

Def : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$$

On note $P(u)$ l'endomorphisme suivant : $P(u) = \sum_{i=0}^{p} a_i u^i$

avec $u^i = \underbrace{u \circ u \circ u \ldots \circ u}_{i \text{ fois}}$

$(u^0 = Id)$

(idem : $P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i$)

On remarque que :

$$\varphi : \begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \longmapsto P(u) \end{pmatrix}$$

($u \in \mathcal{L}(E)$ fixé) est un morphisme d'algèbre, en particulier :

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

Def : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Il existe toujours une infinité de tels polynômes : par exemple $\{Id, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\}$ est une famille liée (d'où l'existence de $P \in \mathbb{K}_{n^2}[X] \setminus \{0\}$ annulant u).

L'ensemble des polynômes annulateurs de u forme un idéal de $\mathbb{K}[X]$ anneau euclidien

On en déduit l'existence (à une constante près) d'un unique polynôme minimal $m_u \in \mathbb{K}[X]$ annulant u et tel que :

si P annule u, alors $m_u \mid P$

On énonce alors le théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème : soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

(ou : $m_u \mid \chi_u$)

preuve : il existe plusieurs démonstrations de Cayley-Hamilton ; hors celle choisie ici, l'une est purement algébrique et l'autre est basée sur la triangularisation sur $\mathbb{C}$ de toute matrice (à voir § suivant). La démonstration choisie ici utilise les matrices compagnons :

soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in E$.

L'objectif est de montrer $\chi_u(u)(v) = 0_E$

On note

$$F = \mathrm{Vect}(\underbrace{\{v, u(v), \dots, u^{k-1}(v)\}}_{\mathcal{B} \text{ libre}})$$

le sous espace vectoriel de E engendré par $\{v, u(v), \dots, u^{p}(v), \dots\}$

Ici :

$$u^k(v) = c_0 v + c_1 u(v) + \dots + c_{k-1} u^{k-1}(v)$$

On a :

$$\left[u_{/F}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & c_{k-1} \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\chi_{u_{/F}}(X) = X^k - c_{k-1}X^{k-1} - \dots - c_0$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}$ étant libre dans E, on la complète en une base $\mathcal{E}$ de E.

On a alors

$$[u]_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} [u_{/F}]_{\mathcal{B}} & C \\ \hline 0 & G \end{array}\right)$$

et $\chi_u(X) = \chi_{u_{/F}}(X)\, Q(X)$

$(Q(X) = \det(XI_{n-k} - G))$

On en déduit :

$$\underbrace{\chi_u(u)}_{K[X] \,/\, \mathcal{L}(E)}(v) = (Q\chi_{u_{/F}})(u)(v) \quad (\in E)$$

soit

$$\chi_u(u)(v) = Q(u)\left(\chi_{u_{/F}}(u)(v)\right)$$

$$= Q(u)\Big(\underbrace{u^k(v) - c_{k-1}u^{k-1}(v) \dots - c_0 v}_{0}\Big)$$

$$= 0 \quad //$$

3) Critères de trigonalisabilité et de diagonalisabilité

1er critère de trigonalisabilité :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\boxed{A \text{ est trigonalisable} \iff \chi_A \text{ scindé sur } \mathbb{K}}$$

(on rappelle que P scindé

$\iff P(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$)

En particulier toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable (et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$).

preuve :

$\Rightarrow$ on peut supposer A triangulaire (car $\chi_T = \chi_A$), soit

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Dans ce cas)

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

(et χ_A scindé).

$\Leftarrow$ récurrence sur n :

($n=1$: immédiat)

On suppose $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$

En particulier, $\lambda_1 \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$)

On note e_1 un vecteur propre associé, qu'on complète en $\mathcal{B} = \{e_1, \dots e_n\}$ pour former une base de E. On a

$$[u]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & c \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

On a :

$$\chi_u(X) = (X-\lambda_1)\,\chi_B(X)$$

On en déduit que χ_B est scindé.

Par l'hypothèse de récurrence, il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que

$$B = Q \begin{pmatrix} s_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{n-1} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

On a alors

$$[u]_{\mathcal{B}} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & s_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_{n-1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \in GL_n(\mathbb{K})$

2ème critère de diagonalisabilité

On constate que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est tel que χ_A scindé sur $\mathbb{R}$ mais non diagonalisable.

Pour exprimer ce critère on définit la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre :

def $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$. Si

$$\begin{cases} * \; m_a(\lambda) : \text{multiplicité de } \lambda \text{ comme racine de } \chi_A \\ * \; m_g(\lambda) = \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I_d)) \end{cases}$$

On a toujours :

$$\boxed{m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)}$$

En effet, par l'absurde, si :

$\dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathrm{Id})}_{m}) > m_a(\lambda)$

avec $\{e_1, \dots e_m\}$ base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda \mathrm{Id})$, en complétant cette base, on aurait

$\chi_A = (X-\lambda)^m Q$, ce qui est absurde //

On a le critère suivant

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A diagonalisable
$\Updownarrow$
χ_A scindé sur $\mathbb{K}$ et $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ pour toute valeur propre $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$

(exercice)

Corollaire : si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

$\left(\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i) \right.$ et $\left. m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i) = 1 \right)$

$3^{\text{ème}}$ critère de diagonalisabilité :

On utilise par ce critère le polynôme minimal :

Théorème : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A est diagonalisable
$\Updownarrow$
m_A est scindé et à racines simples

preuve :

$\Rightarrow$: on a

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}}_{D} P^{-1}$$

On a $m_A(X) = m_D(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_p)$

scindé à racines simples.

$\Leftarrow$ on suppose que

$$m_A(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_p)$$

On a aussi

$$\frac{1}{m_A(X)} = \frac{a_1}{X-\lambda_1} + \cdots + \frac{a_p}{X-\lambda_p}$$

(décomposition en éléments simples)

soit

$$1 = \sum_{i=1}^{p} a_i \underbrace{Q_i(X)}_{\prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)}$$

Si $Y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$Y = \underbrace{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{p} a_i Q\right)}_{\text{poly}}(A)}_{\text{endo.}}(Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \left(\underbrace{Q(A)(Y)}_{Z_i}\right)$$

On a $(A - \lambda_i I)(Z_i) = m_A(A)(Z_i)$
$= 0$

c'est à dire $Z_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_d)$
$= E_{\lambda_i}(A)$

On a ainsi montré que

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

(caractère générateur + libre)

Remarque : il suffit de trouver un polynôme annulateur, scindé à racines simples de A par conclure que A diagonalisable.

Cette démonstration utilise un argument de type "lemme des noyaux"

Lemme des noyaux : $u \in \mathcal{L}(E)$

$P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P \wedge Q = 1$. Alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(PQ)(u) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))}$$

preuve : Par l'identité de Bezout

$$AP + BQ = 1$$

Soit $y \in \mathrm{Ker}\,(PQ)(u)$, on a

$$y = \underbrace{(AP)(u)(y)}_{z_1} + \underbrace{(BP)(u)(y)}_{z_2}$$

On a $Q(u)(z_1) = A(u)(PQ)(u)(y))$
$= 0$

De même

$Q(u)(z_2) = 0$.

et on a la somme demandée entre espaces vectoriels.

Celle-ci est directe : si

$z \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$

$P(u)(z) = Q(u)(z) = 0$

Bezout donne

$z = (AP)(u)(z) + (BQ)(u)(z)$
$= 0 + 0$ //

Corollaire (du critère 3) si $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F sous espace de E, stable par u, alors $u_{/F}$ est également diagonalisable.

preuve : m_u est scindé à racines simples et m_u est un polynôme annulateur de $u_{/F}$

D'où $m_{u_{/F}}$ est scindé à racines simples $\Rightarrow$ $u_{/F}$ diagonalisable.

Retour sur le 2ème critère : 17

Théorème : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

A diagonalisable
$\Updownarrow$
χ_A scindé sur $\mathbb{K}$ et $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ pour toute valeur propre $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$

preuve

$\Longrightarrow$ χ_A scindé (A trigonalisable)
De plus :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}$$

soit $n = \sum_{i=1}^{p} m_g(\lambda_i)$

(par les dimensions). Or,

$m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$, on a forcément égalité (sinon $\sum_{i=1}^{p} m_a(\lambda_i) > n$: absurde).

$\Leftarrow$ on a $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{m_a(\lambda_i)}$

On a toujours somme directe entre espaces propres et

$$\dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^{n} m_g(\lambda_i) \underset{(\text{hyp.})}{=} \sum_{i=1}^{p} m_a(\lambda_i)$$

$$= d^\circ \chi_A = n$$

On en déduit

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n} = E$$

et A diagonalisable //