# Séance 8 : algèbre linéaire
# décomposition de Dunford-Jordan

Objectif on cherche ici à réduire un endomorphisme, afin de l'ecrire dans une base adaptée sous la forme

$$\operatorname{Mat}_{\beta}(u) = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

où $$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(résultat general si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Cela permettra de multiples applications à partir du calcul de $A^k$ :

→ étude de systèmes de suites recurrentes linéaires (nombreuses modélisations : voir textes)

→ résolution de systèmes linéaires d'equations différentielles (idem)

On va montrer les deux théorèmes fondamentaux suivants :

**Théorème 1 (Dunford)** $\left.\right\}$ $E$ ev DF, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Alors il existe $d$ et $n$ deux endomorphismes tels que :

- $d$ diagonale
- $n$ nilpotente ($\exists m \geqslant 1$ tq $n^m = 0$)
- $d \circ n = n \circ d$
- $d$ et $n$ polynômes en $u$
- $\boxed{u = d + n}$

Cette décomposition, dite de Dunford est unique.

### Théorème 2 (décomposition de Jordan)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A$ scindé sur $\mathbb{K}$. Alors $A$ est semblable à une matrice du type :

$$A_J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

avec $J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ telle que

$$Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \ldots \lambda_r\}$$

(et $r$ ne dépend que de $A$).

La demonstration de ces deux théorèmes est constructive. Elle fait appel à la notion de projecteur spectral :

## 1) Sous espaces caractéristiques

Def : soit $E$ un $\mathbb{K}$ev ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\lambda\in\mathbb{K}$. On dit que $x\in E$ est un vecteur propre généralisé par $\lambda$ s'il existe $m\geq 1$ tq $(u-\lambda Id)^m x = 0$. On note

$$\boxed{E^\lambda(u) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \operatorname{Ker}(u-\lambda Id)^i}$$

les sous espace caractéristique de $u$ associé à $\lambda$.

On a $E^\lambda(u)\neq\{0\} \iff \lambda\in Sp_{\mathbb{K}}(u)$

En effet si $x\in E^\lambda(u)\setminus\{0\}$, si $m$ est le plus petit indice tel que $(u-\lambda Id)^m(x)=0$, alors $(u-\lambda Id)^{m-1}(x)\neq 0$ est un vecteur propre de $u$ par la valeur propre $\lambda$.

(attention : $E^\lambda(u)$ contient le sous espace propre $E_\lambda(u)$ mais n'est pas toujours égal à celui-ci.

On a le premier résultat suivant :

**Proposition** $E$, $\mathbb{K}$, $u$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

Alors $E^\lambda$ est stable par $u$ et il existe une base $\beta$ de $E^\lambda$ telle que

$$\mathrm{Mat}_\beta(u/_{E^\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

**preuve** : on a l'existence d'un certain $m \geq 1$ tq :

$$\{0\} \subsetneq \ker(u-\lambda Id) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(u-\lambda Id)^m = \ker(u-\lambda Id)^{m+1} \dots$$

On construit alors une base

$\beta_\lambda = (e_1, \dots e_p)$ tq :

→ $e_1, \dots e_{n_1}$ base de $\ker(u-\lambda Id)$

→ $(e_1, \dots \boxed{e_{n_1+1}} \dots e_{n_2})$ " " $(u-\lambda Id)^2$

→ $(e_1, \dots e_p) \dots \ker(u-\lambda Id)^m$

Par exemple : $e_{n_1+1}$ est tel que

$$u(e_{n_1+1}) - \lambda e_{n_1+1} \in \ker(u-\lambda Id)$$

D'où

$$\begin{array}{c} n_1 \updownarrow \\ \\ \\ \end{array} \mathrm{Mat}_\beta(u/_{E^\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \times & & * \\ 0 & \lambda & \times & & * \\ & & \lambda & & * \\ & 0 & & \ddots & * \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à présent à la somme directe des sous-espaces caractéristiques :

**Proposition** : $E$, $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ alors, si $\chi_u$ est scindé

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E^{\lambda}(u)$$ et

avec $\dim E^{\lambda}(u) = m_a(\lambda)$

(multiplicité algébrique de $\lambda$ comme racine de $\chi_u$).

preuve : on a toujours

$$\sum_{i=1}^{n} E^{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^{n} E^{\lambda_i}$$

si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ 2à2 distincts

En effet, par le lemme des noyaux,

$$(X-\lambda_i)^{m_i} \wedge (X-\lambda_j)^{m_j}$$

(on écrit $1 = \frac{1}{\mu-\lambda}\left[(X-\lambda)-(X-\mu)\right]$ et on élève à la puissance $\max(m_i, m_j)$, on conclut avec Bezout)

Par le lemme des noyaux :

$$E^{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(u-\lambda_i Id)^{m_i}$$

$$\bigoplus$$

$$E^{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(u-\lambda_j Id)^{m_j}$$

Reste à montrer l'égalité des dimensions grâce à la proposition précédente, on complète $\beta_\lambda$ base de $E^\lambda(u)$ en une base $\beta$ de $E$. On a :

$$\underset{\beta}{\mathrm{Mat}}(u) = r\updownarrow\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & * \\ & \lambda \end{matrix} & * \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_u(X) = (X-\lambda)^r \chi_D(X)$$

avec $r = \dim(E^\lambda)$

On a donc déjà $r \leq m_a(\lambda)$

Il reste à montrer que $(X-\lambda)$ ne divise pas $\chi_D(X)$.

Par l'absurde, il existe $x \notin E^\lambda$ tq

$$u(x) = \lambda x + \underbrace{w}_{E^\lambda}$$

En particulier $(u-\lambda Id)(x) \in E^\lambda$ et ainsi il existe $m \geq 1$ tq

$$(u-\lambda Id)^m\big((u-\lambda Id)x\big) = 0$$

soit $x \in E^\lambda$ : absurde.

Comme $\chi_u$ est scindé, on a

$$n = \sum_{\lambda_i \in Sp(u)} m_a(\lambda_i) \text{ et}$$

la somme directe

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} E^{\lambda}(u)$$

est prouvée //

## 2) Projecteurs spectraux

Dans toute cette partie, on suppose que $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ (toujours vrai si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) c'est à dire :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{m_i}$$

On a vu au §1 : $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E^{\lambda_i}$

On note $p_i$ $(1 \leq i \leq m)$ le projecteur sur $E^{\lambda_i}$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E^{\lambda_j}$.

On remarque que $p_i$ peut s'exprimer grâce à $\chi_u$ et est un polynôme en $u$ : en effet, si

$$\frac{1}{\chi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{U_i}{(X-\lambda_i)^{m_i}}$$

avec $d^0 U_i \leq m_i - 1$.

(décomposition en éléments simples)

ce qui implique :

$$1 = \sum_{i=1}^{m} U_i \overbrace{\left(\prod_{j\neq i}(X-\lambda_j)^{m_j}\right)}^{Q_i}$$

Si $x \in E$, on a :

$$x = \sum_{i=1}^{m} \boxed{Q_i(u)(x)} \; E_i$$

On montre que $\underline{p_i = Q_i(u)}$

En effet $Q_i(u)(x) \in E^{\lambda_i}$ car

$$\left((X-\lambda_i)^{m_i} Q_i(u)\right)(x) = \boxed{(U_i \chi_u)(u)(x)} = 0$$

(et $p_i(x) = Q_i(u)(x)$)

(on remarque que $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i$).

A ce stade, on dispose de tous les outils pour démontrer les théorèmes de Dunford et Jordan, ainsi que de la capacité à calculer explicitement $p_i$ en fonction de $u$.

## 3) Preuve du théorème de Dunford

→ existence : on prend

$$d = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$$ où

$p_i$ projecteur spectral associé à $\lambda_i$

et

$$n = u - d$$

On a bien :

→ $u = d + n$

→ d diagonalisable

$$\underset{(\oplus E^{\lambda_i})}{\mathrm{Mat}(d)} = m_1 \updownarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

→ d et n polynômes en u

→ $dn = nd$

→ n nilpotent : en effet, si $x \in E^{\lambda_i}$,

$$n(x) = u(x) - d(x)$$
$$= u(x) - \lambda_i x$$
$$= (u - \lambda_i Id)(x)$$

et ainsi $n^{m_i}(x) = 0$

et $n^k = 0$ avec

$$k = \mathrm{Max}(m_1, \dots m_m)$$

→ unicité : basée sur un résultat de codiagonalisation :

Lemme : si $u$ et $v$ endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$, $u$ et $v$ sont diagonalisables dans une même base (savoir faire)

On démontre alors l'unicité par l'absurde : si $d+n = d'+n'$ alors $n-n' = d-d'$. De plus $n$ et $n'$ commutent (polynômes en $u$) On a donc $n-n'$ nilpotent par le binôme de Newton. Comme $d$ et $d'$ commutent également, $d-d'$ est donc diagonalisable et nilpotent : $d-d' = 0 \Rightarrow n = n'$ //

★ Exemple : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

on peut calculer :

→ $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$ (scindé sur $\mathbb{R}$)

→ DES(....)

→ $\begin{cases} p_1 = (A-2I)^2 \\ p_2 = (3I-A)(A-I) \end{cases}$

→ $d = p_1 + 2p_2$ et $n = A - d$

# 4) Preuve du théorème de Jordan

On utilise le théorème de Dunford :

$A = D + N$ (avec $DN = ND$

et $D, N$ polynômes en $A$)

Dans une base associée à $\bigoplus_{i=1}^{m} E^{\lambda_i}$

on a $[N]_\beta = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & N_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

On montre que chaque matrice $N_i$ est semblable à une matrice du type

$$\begin{pmatrix} p\updownarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Pour cela, on prend $x \in E^{\lambda_i} \setminus \{0\}$

on construit la famille libre $\{x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ telle que $u^p(x) = 0$ (et $u^{p-1}(x) \neq 0$) :

$\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j u^j(x) = 0$, alors $\lambda_j = 0$.

On obtient bien la décomposition de Jordan annoncée.

## 5) Exponentielle de matrice

Déf si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, donc convergente. On note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On a les resultats suivants (à demontrer en exercice) :

→ si $D$ diagonale, $\exp(D) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$

→ si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

→ $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

→ $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{Tr}(A))$ (trigonalisation sur $\mathbb{C}$)

Le calcul explicite de $\exp(A)$ peut être effectué facilement si $A$ est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1},$$

ou à l'aide de Dunford dans

le cas général :

$A = D + N$ (calculable avec $p_i$)

$$\exp(A) = \exp(D)\underbrace{\exp(N)}_{\text{(somme finie de termes)}}$$

## 6) Applications

### 6.1) Systèmes de suites récurrentes linéaires

On cherche à étudier l'évolution des suites $(u^1, u^2, \dots, u^m)$

telles que

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}_{k+1} = A \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}_k$$

avec $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

On a :

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^m \end{pmatrix}_k = A^k \begin{pmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_0^m \end{pmatrix}$$

Le problème revient à calculer $A^k$ :

→ si A est diagonalisable )

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

→ sinon, on écrit $A = D + N$

et $$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(k,m)} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j$$

m+1 termes au plus

où $m$ tel que $N^{m+1} = 0$

## 6.2 Resolution de systèmes linéaires d'equations différentielles

On considère le système différentiel

$$\underbrace{\mathbf{X}}_{\in \mathbb{R}^m}'(t) = \underbrace{\mathbf{A}}_{\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})} X(t)$$

On peut montrer que les solutions de ce système s'écrivent :

$$X(t) = \exp(tA).X(0)$$

(voir séances à venir)

La décomposition $A = D + N$ permet d'expliciter $\exp(tA)$ et donc $X(t)$.

## Quelques exercices autour de ce chapitre :

→ lien avec le polynôme minimal

si $\chi_A$ est scindé :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{m_i} \text{ alors,}$$

$$\Pi_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$$

(polynôme minimal)

avec $\alpha_i \leq m_i$. Montrer que

$$E^{\lambda_i}(A) = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{\alpha_i}$$

En effet, on a par le lemme des noyaux

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(\underbrace{\Pi_A(A)}_{0})}_{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{\alpha_i}$$

De plus $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i Id)^{\alpha_i} \subset E^{\lambda_i}$,

sachant que $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E^{\lambda_i}$,

on a bien $E^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{\alpha_i}$

→ sujet MG 2017, partie 1

# Partie 1.

1) $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\Pi_u)$

2) Si $u$ nilpotent, alors par tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$

$(\mathrm{Tr}(u) = 0$, car $\chi_u(X) = X^n)$